次の問いに答えよ．ただし n を自然数とする．

(1)　$x>0$ のとき，不等式 $e^x>1+x$ が成り立つことを示せ．

(2)　$x>0$ のとき，次の不等式が成り立つことを数学的帰納法を用いて示せ．

$$e^x>1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}$$

(3)　極限値 $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^n}{e^x}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ を求めよ．

〔2013　同志社大 理工学部〕

〔解答例〕

(1)　$f(x)=e^x-(1+x)$

(左辺)−(右辺)>0 を示す!

とすると $f'(x)=e^x-1$

$x>0$ のとき $e^x>e^0=1$ であるから $f'(x)>0$

$x>0$ のとき $f(x)$ は単調増加である．

また $f(0)=0$

x	(0)	$\cdots$	(∞)
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	(0)	$\nearrow$	

よって $x>0$ のとき $f(x)>0$ すなわち $e^x>1+x$ は成り立つ．

(2)　$f_n(x)=e^x-\left(1+\dfrac{x}{1!}+\dfrac{x^2}{2!}+\cdots+\dfrac{x^n}{n!}\right)$

← nによって(左辺)−(右辺)は変わるので 関数列$\{f_n(x)\}$を考える.

とする．

すべての自然数 n に対して

　$x>0$ のとき $f_n(x)>0$ ……Ⓐ

が成り立つことを数学的帰納法で示す．

(Ⅰ)　$f_1(x)=e^x-(1+x)=f(x)>0$ $(\because (1))$

すなわち $n=1$ のとき Ⓐ は成り立つ．

(Ⅱ)　$n=k$ $(k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ のとき Ⓐ が成り立つと仮定すると

$x>0$ のとき $f_k(x)=e^x-\left(1+\dfrac{x}{1!}+\dfrac{x^2}{2!}+\cdots+\dfrac{x^k}{k!}\right)>0$ ……①

が成り立つ．

このとき $f_{k+1}(x)=e^x-\left\{1+\dfrac{x}{1!}+\dfrac{x^2}{2!}+\cdots+\dfrac{x^{k+1}}{(k+1)!}\right\}$ について

$$f'_{k+1}(x)=e^x-\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^k}{k!}\right)$$

$x>0$ のとき ① より $f'_{k+1}(x)>0$ であるから

$x>0$ のとき $f_{k+1}(x)$ は単調増加である．

また $f_{k+1}(0)=0$

x	(0)	$\cdots$	(∞)
$f'_{k+1}(x)$		$+$	
$f_{k+1}(x)$	(0)	$\nearrow$	

これらのことから $x>0$ のとき $f_{k+1}(x)>0$ である．

すなわち $n=k+1$ のときも Ⓐ は成り立つ．

よって(Ⅰ)，(Ⅱ)より示された．

↙ 各項は正

(3)　(2)より $e^x>1+\dfrac{x}{1!}+\dfrac{x^2}{2!}+\cdots+\dfrac{x^n}{n!}+\dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}>\dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}$

$e^x>\dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}$

これより $0<\dfrac{x^n}{e^x}<\dfrac{(n+1)!}{x}$

ここで $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{(n+1)!}{x}=0$

よって，はさみうちの原理から $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^n}{e^x}=\mathbf{0}$

補 $e^x=t$ とおくと $x=\log t$

$x\to\infty$ ならば $t\to\infty$ なので

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^x}=\lim_{t\to\infty}\frac{(\log t)^n}{t}=0$

も成り立つ