次の定積分を求めよ．

$$\int_0^1 \left(x^2 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)\left(1 + \frac{x}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}\right)dx$$

〔2019　東大 理科 前期〕

〔解答例〕

求める定積分を I とすると

展開した！

$$I = \int_0^1 \left\{x^2 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{x^3}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}} + \frac{x^2}{(1+x^2)^2}\right\} dx$$

ここで

$$I_1 = \int_0^1 x^2\,dx$$

$$I_2 = \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$$

$$I_3 = \int_0^1 \frac{x^3}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}\,dx$$

$$I_4 = \int_0^1 \frac{x^2}{(1+x^2)^2}\,dx$$

4つの積分に分けて
それぞれ求めてみた

とおくと

$$I = I_1 + I_2 + I_3 + I_4$$

$$I_1 = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

$$I_2 = \left[\sqrt{1+x^2}\right]_0^1 = \sqrt{2} - 1$$

$\boxed{I_2}$

$(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

$\{\sqrt{g(x)}\}' = \dfrac{g'(x)}{2\sqrt{g(x)}}$

なので

$\displaystyle\int \frac{g'(x)}{2\sqrt{g(x)}}\,dx = \sqrt{g(x)} + C$

$\boxed{I_3}$ は $\displaystyle\int g'(x)\{g(x)\}^{\alpha}dx = \frac{1}{\alpha+1}\{g(x)\}^{\alpha+1} + C$ $(\alpha \neq -1)$

$\displaystyle\int \frac{x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\,dx = \int \frac{1}{2}\cdot 2x(1+x^2)^{-\frac{3}{2}}\,dx$

$\displaystyle = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{-\frac{3}{2}+1}(1+x^2)^{-\frac{3}{2}+1} + C$

$= -(1+x^2)^{-\frac{1}{2}} + C$

$\displaystyle = -\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} + C$

I_3 で部分積分法を用いて

$$I_3 = \int_0^1 x^2 \cdot \frac{x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\,dx = \left[x^2 \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)\right]_0^1 - \int_0^1 2x\left(-\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)dx$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}} + 2\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx = -\frac{1}{\sqrt{2}} + 2I_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}} + 2(\sqrt{2}-1)$$

求めた I_2 が出てくる

$$= \frac{3}{2}\sqrt{2} - 2$$

I_4 で $x = \tan\theta$ と置換すると

x	$0 \to 1$
θ	$0 \to \frac{\pi}{4}$

$$I_4 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan^2\theta}{(1+\tan^2\theta)^2}\,\frac{dx}{d\theta}\,d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan^2\theta}{\frac{1}{\cos^4\theta}}\,\frac{1}{\cos^2\theta}\,d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2\theta\,d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1-\cos 2\theta}{2}\,d\theta = \left[\frac{\theta}{2} - \frac{\sin 2\theta}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}$$

よって $I = \dfrac{1}{3} + \sqrt{2} - 1 + \dfrac{3}{2}\sqrt{2} - 2 + \dfrac{\pi}{8} - \dfrac{1}{4} = \boldsymbol{\dfrac{\pi}{8} + \dfrac{5}{2}\sqrt{2} - \dfrac{35}{12}}$

$I_1 + I_2 + I_3 + I_4$ で I は求まる！