n を 2 以上の自然数として，

$$S_n = \sum_{k=n}^{n^3-1} \frac{1}{k \log k}$$

とおく．以下の問に答えよ．

(1) $\displaystyle\int_n^{n^3} \frac{dx}{x \log x}$ を求めよ．

(2) k を 2 以上の自然数とするとき，

$$\frac{1}{(k+1)\log(k+1)} < \int_k^{k+1} \frac{dx}{x \log x} < \frac{1}{k \log k}$$

を示せ．

(3) $\displaystyle\lim_{n \to \infty} S_n$ の値を求めよ．

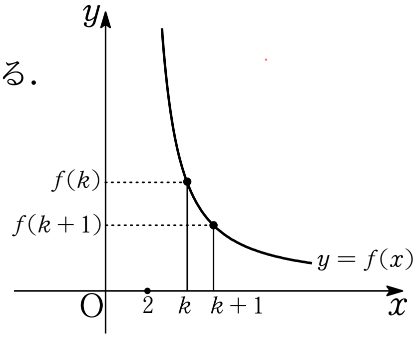
〔 解答例 〕

$\displaystyle\int \frac{g'(x)}{g(x)}\,dx = \log|g(x)| + C$

(1)
$$\int_n^{n^3} \frac{dx}{x \log x} = \int_n^{n^3} \frac{\frac{1}{x}}{\log x}\,dx = \Big[\, \log|\log x| \,\Big]_n^{n^3} = \log|\log n^3| - \log|\log n|$$
$$= \log\left|\frac{\log n^3}{\log n}\right| = \log\left|\frac{3\log n}{\log n}\right|$$
$$= \mathbf{\log 3}$$

(2) $f(x) = \dfrac{1}{x \log x}$ $(x \geqq 2)$

$f'(x) = \dfrac{-(\log x + 1)}{x \log x} < 0$ としてもよいが 分子が正の定数 1 なので分母に着目



とおくと，$x \log x$ は単調増加なので $f(x)$ は単調減少である．

このことから $k \leqq x \leqq k+1$ において

$$f(k+1) \leqq f(x) \leqq f(k)$$

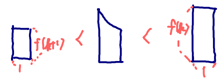
が成り立ち，等号は恒等的に成り立たないので

$$\int_k^{k+1} f(k+1)\,dx < \int_k^{k+1} f(x)\,dx < \int_k^{k+1} f(k)\,dx$$

が成り立つ．すなわち

$$f(k+1) < \int_k^{k+1} f(x)\,dx < f(k) \quad \cdots\cdots ①$$

面積のイメージ



が成り立つ．

よって $\dfrac{1}{(k+1)\log(k+1)} < \displaystyle\int_k^{k+1} \frac{dx}{x \log x} < \frac{1}{k \log k}$ は示された．

(3) $S_n = \displaystyle\sum_{k=n}^{n^3-1} f(k) = f(n) + f(n+1) + \cdots + f(n^3 - 1)$

① で $k = n,\ n+1,\ n+2,\ \cdots,\ n^3 - 1$ として和をとると

$$\sum_{k=n}^{n^3-1} f(k+1) < \sum_{k=n}^{n^3-1} \int_k^{k+1} f(x)\,dx < \sum_{k=n}^{n^3-1} f(k) \quad \cdots\cdots ②$$

ここで

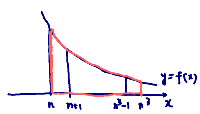
$$\sum_{k=n}^{n^3-1} f(k+1) = f(n+1) + f(n+2) + \cdots + f(n^3 - 1) + f(n^3)$$

$f(n) - f(n)$

$$= \sum_{k=n}^{n^3-1} f(k) + f(n^3) - f(n)$$

$$\sum_{k=n}^{n^3-1} \int_k^{k+1} f(x)\,dx = \int_n^{n+1} f(x)\,dx + \int_{n+1}^{n+2} f(x)\,dx + \cdots + \int_{n^3-1}^{n^3} f(x)\,dx$$

$$= \int_n^{n^3} \frac{dx}{x \log x} = \log 3 \ \ (\because (1))$$



② は $S_n + f(n^3) - f(n) < \log 3 < S_n$

すなわち $\log 3 < S_n < \log 3 - f(n^3) + f(n)$ ……③

ここで

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left\{\log 3 - f(n^3) + f(n)\right\} &= \lim_{n\to\infty}\left(\log 3 - \frac{1}{n^3\log n^3} + \frac{1}{n\log n}\right)\\ &= \log 3\end{aligned}$$

よって，③ で「はさみうちの原理」を用いて

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \mathbf{\log 3}$$