次の極限値を求めよ．

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{n\pi} e^{-x}|\sin nx|\,dx$$

〔2001　京大 理系 前期〕

〔解答例〕

$$I_n=\int_0^{n\pi} e^{-x}|\sin nx|\,dx$$

とおく．

nx がやっかいなので nx=t とした
|sin nx| より |sin t| があつかいやすい!
あとは [15] と同じですが計算は激しい

$$nx=t \iff x=\frac{t}{n}$$

と置換すると $\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{1}{n}$,

x	0	$\to$	$n\pi$
t	0	$\to$	$n^2\pi$

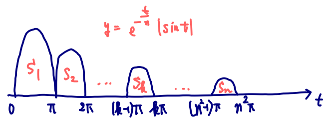
$$I_n=\int_0^{n^2\pi} e^{-\frac{t}{n}}|\sin t|\frac{dx}{dt}dt$$

$$=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n^2}\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} e^{-\frac{t}{n}}|\sin t|\,dt$$

$$S_k=\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} e^{-\frac{t}{n}}|\sin t|\,dt$$

とおくと

$I_n=\frac{1}{n}(S_1+S_2+\cdots+S_n)$



$$I_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n^2}S_k$$

$$u=t-(k-1)\pi \iff t=u+(k-1)\pi$$

と置換すると $\dfrac{dt}{du}=1$,

t	$(k-1)\pi$	$\to$	$k\pi$
u	0	$\to$	π

$$S_k=\int_0^{\pi} e^{-\frac{u+(k-1)\pi}{n}}\sin u\,du$$

$$=e^{-\frac{(k-1)\pi}{n}}\int_0^{\pi} e^{-\frac{u}{n}}\sin u\,du$$

ここで

$$\left(e^{-\frac{u}{n}}\sin u\right)'=-\frac{1}{n}e^{-\frac{u}{n}}\sin u+e^{-\frac{u}{n}}\cos u \quad \cdots\cdots①$$

$$\left(e^{-\frac{u}{n}}\cos u\right)'=-\frac{1}{n}e^{-\frac{u}{n}}\cos u-e^{-\frac{u}{n}}\sin u \quad \cdots\cdots②$$

②×n として $\left(ne^{-\frac{u}{n}}\cos u\right)'=-e^{-\frac{u}{n}}\cos u-ne^{-\frac{u}{n}}\sin u \quad \cdots\cdots②'$

①＋②′ として $\left\{e^{-\frac{u}{n}}(\sin u+n\cos u)\right\}'=-\dfrac{n^2+1}{n}e^{-\frac{u}{n}}\sin u$

すなわち $\left\{-\dfrac{n}{n^2+1}e^{\frac{u}{n}}(\sin u+n\cos u)\right\}'=e^{-\frac{u}{n}}\sin u$

$$S_k=e^{-\frac{(k-1)\pi}{n}}\left[-\frac{n}{n^2+1}e^{-\frac{u}{n}}(\sin u+n\cos u)\right]_0^{\pi}$$

$$=-e^{-\frac{(k-1)\pi}{n}}\cdot\frac{n}{n^2+1}\left\{e^{-\frac{\pi}{n}}(-n)-n\right\}$$

$$=e^{-\frac{(k-1)\pi}{n}}\cdot\frac{n^2}{n^2+1}\left(e^{-\frac{\pi}{n}}+1\right)$$

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} I_n &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n^2} S_k \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n^2+1}\left(e^{-\frac{\pi}{n}}+1\right)\sum_{k=1}^{n^2} e^{-\frac{(k-1)\pi}{n}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n^2+1}\left(e^{-\frac{\pi}{n}}+1\right)\cdot\frac{1-\left(e^{-\frac{\pi}{n}}\right)^{n^2}}{1-e^{-\frac{\pi}{n}}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n^2+1}\cdot\frac{1+e^{\frac{\pi}{n}}}{e^{\frac{\pi}{n}}-1}\left\{1-\left(e^{-\pi}\right)^n\right\} \\
&= \lim_{n\to\infty} \underbrace{\frac{n^2}{n^2+1}}_{=\frac{1}{1+\frac{1}{n^2}}\to 1}\cdot\frac{1+e^{\frac{\pi}{n}}}{\dfrac{e^{\frac{\pi}{n}}-1}{\frac{\pi}{n}}\cdot\pi}\left\{1-\underbrace{\left(e^{-\pi}\right)^n}_{\to 0}\right\} \\
&= 1\cdot\frac{1+1}{1\cdot\pi}(1-0) \\
&= \boldsymbol{\frac{2}{\pi}}
\end{aligned}
$$

初項1，公比 $e^{-\frac{\pi}{n}}$
項数 n^2
の等比数列の和

$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$