

$f(x) = 1 + \sin x - x \cos x$ について、以下の問いに答えよ。

(1) $f(x)$ の $0 \leq x \leq 2\pi$ における増減を調べ、最大値と最小値を求めよ。

(2) $f(x)$ の不定積分を求めよ。

(3) 次の定積分の値を求めよ。

$$\int_0^{2\pi} |f(x)| dx$$

[2017 北大 理系 前期]

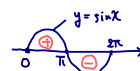
[解答例]

(1) $f'(x) = \cos x - (\cos x - x \sin x) = x \sin x$

← $x \geq 0$ なので
 $\sin x$ の符号が $f'(x)$ の符号と一致

増減表は次のようになる。

x	0	...	π	...	2π
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$	1	↗	$1 + \pi$	↘	$1 - 2\pi$



よって、 $f(x)$ の最大値 $1 + \pi$ ($x = \pi$)、最小値 $1 - 2\pi$ ($x = 2\pi$)

(2) $\int f(x) dx = \int (1 + \sin x - x \cos x) dx$
 $= x - \cos x - (x \sin x + \cos x) + C$
 $= x - 2 \cos x - x \sin x + C$ (C は積分定数)

(3) $f\left(\frac{3}{2}\pi\right) = 1 + \sin \frac{3}{2}\pi - \frac{3}{2}\pi \cos \frac{3}{2}\pi = 1 + (-1) - 0 = 0$
 ← これに気がきた!!

$y = f(x)$ のグラフを考えて

$$|f(x)| = \begin{cases} f(x) & \left(0 \leq x \leq \frac{3}{2}\pi\right) \\ -f(x) & \left(\frac{3}{2}\pi \leq x \leq 2\pi\right) \end{cases}$$

$F(x) = x - 2 \cos x - x \sin x$ ← (2) から

とおくと

$\int f(x) dx = F(x) + C$

$F(0) = -2$

$F(2\pi) = 2\pi - 2$

$F\left(\frac{3}{2}\pi\right) = 3\pi$

$$\int_0^{2\pi} |f(x)| dx = \int_0^{\frac{3}{2}\pi} f(x) dx + \int_{\frac{3}{2}\pi}^{2\pi} \{-f(x)\} dx$$

$$= \left[F(x) \right]_0^{\frac{3}{2}\pi} + \left[-F(x) \right]_{\frac{3}{2}\pi}^{2\pi}$$

$$= F\left(\frac{3}{2}\pi\right) - F(0) - F(2\pi) + F\left(\frac{3}{2}\pi\right)$$

$$= 2F\left(\frac{3}{2}\pi\right) - F(0) - F(2\pi)$$

$$= 2 \cdot 3\pi - (-2) - (2\pi - 2)$$

$$= 4\pi + 4$$

