関数 $f(x)=\displaystyle\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt$ について，次の問いに答えよ．

(1)　$f(1)$ を求めよ．

(2)　$x>0$ のとき，$f(x)+f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ は定数であることを示し，その値を求めよ．

(3)　$\displaystyle\int_0^1 xf(x)\,dx$ の値を求めよ．

〔 **解答例** 〕

(1)　$t=\tan\theta$ と置換すると

t	$0 \to 1$
θ	$0 \to \frac{\pi}{4}$

$$f(1)=\int_0^1\frac{1}{1+t^2}\,dt=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{1+\tan^2\theta}\,\frac{dt}{d\theta}d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2\theta\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}\,d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta=\Big[\,\theta\,\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}=\boldsymbol{\frac{\pi}{4}}$$

$\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_{a(x)}^{b(x)} g(t)\,dt = g\big(b(x)\big)b'(x) - g\big(a(x)\big)a'(x)$

(2)　$F(x)=f(x)+f\left(\dfrac{1}{x}\right)\ (x>0)$

とすると

$$F'(x)=f'(x)-f'\left(\frac{1}{x}\right)\left(\frac{1}{x}\right)'=\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}\left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$=\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{x^2+1}=0$$

よって　$F'(x)=0$　であるから $F(x)$ は定数である．

$\boxed{F'(x)=0 \Leftrightarrow F(x)\text{は定数}}$

定数であることを示すのは
導関数が0であることで示せる!

$x=1$ とすると $F(1)=f(1)+f(1)=\dfrac{\pi}{2}$　$(\because (1))$

よって　$F(x)=\boldsymbol{\dfrac{\pi}{2}}$

(3)　$\displaystyle\int_0^1 xf(x)\,dx=\left[\,\frac{1+x^2}{2}f(x)\,\right]_0^1-\int_0^1\frac{1+x^2}{2}\cdot\frac{1}{1+x^2}\,dx$　（$\because$ 部分積分法）

せ　　び

$f'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$

$$=f(1)-\frac{1}{2}f(0)-\frac{1}{2}\int_0^1 dx$$

$[x]_0^1=1$

$$=\boldsymbol{\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}}$$

$\displaystyle\int_0^0 \frac{1}{1+t^2}\,dt=0$