関数 $f(x)=\dfrac{e^{\frac{1}{4}|x|}}{x^2-3x+18}$ とする．次の問に答えよ．

(1)　$f(x)$ の極小値をすべて求めよ．

(2)　$f(x)$ の最小値を求めよ．ただし，必要ならば $e>2.7$ を用いてよい．

〔2003　神大 理系 前期〕

〔解答例〕

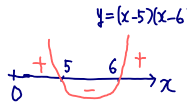
(1)　$x^2-3x+18=\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2+\dfrac{63}{4}>0$ より $f(x)$ は実数全体で定義される．

㋐ $x>0$ のとき $f(x)=\dfrac{e^{\frac{1}{4}x}}{x^2-3x+18}$

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{4}e^{\frac{1}{4}x}(x^2-3x+18)-e^{\frac{1}{4}x}(2x-3)}{(x^2-3x+18)^2}$$

$$=\frac{e^{\frac{1}{4}x}\{(x^2-3x+18)-4(2x-3)\}}{4(x^2-3x+18)^2}$$

$$=\frac{e^{\frac{1}{4}x}(x^2-11x+30)}{4(x^2-3x+18)^2}=\frac{e^{\frac{1}{4}x}\boxed{(x-5)(x-6)}}{4(x^2-3x+18)^2}$$



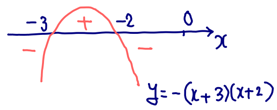
$f'(x)=0$ とすると　$x=5,\ 6$

㋑ $x<0$ のとき $f(x)=\dfrac{e^{-\frac{1}{4}x}}{x^2-3x+18}$

$$f'(x)=\frac{-\frac{1}{4}e^{-\frac{1}{4}x}(x^2-3x+18)-e^{-\frac{1}{4}x}(2x-3)}{(x^2-3x+18)^2}$$

$$=\frac{-e^{-\frac{1}{4}x}\{(x^2-3x+18)+4(2x-3)\}}{4(x^2-3x+18)^2}$$

$$=\frac{-e^{-\frac{1}{4}x}(x^2+5x+6)}{4(x^2-3x+18)^2}=\frac{\boxed{-}e^{-\frac{1}{4}x}\boxed{(x+3)(x+2)}}{4(x^2-3x+18)^2}$$



$f'(x)=0$ とすると　$x=-3,\ -2$

x	$(-\infty)$	$\cdots$	-3	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$	5	$\cdots$	6	$\cdots$	(∞)
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘	極小	↗		↘	極小	↗		↘	極小	↗	

よって，増減表より極小値は

$f(-3)=\boldsymbol{\dfrac{e^{\frac{3}{4}}}{36}}$，$f(0)=\boldsymbol{\dfrac{1}{18}}$，$f(6)=\boldsymbol{\dfrac{e^{\frac{3}{2}}}{36}}$　← x=0 で f(x) は微分不可能ですが f(0) は極小値です!

(2)　$f(x)$ の最小値は (1) で求めた 3 つの極小値のうちで最も小さい値である．

$e^{\frac{3}{2}}>e^{\frac{3}{4}}$ であるから　$f(6)>f(-3)$ ……①

$\left(e^{\frac{3}{4}}\right)^4=e^3>(2.7)^3=19.683>16=2^4$　$\therefore\ e^{\frac{3}{4}}>2$

これより　$\dfrac{e^{\frac{3}{4}}}{36}>\dfrac{2}{36}=\dfrac{1}{18}$　であるから　$f(-3)>f(0)$ ……②

①，② から　$f(6)>f(-3)>f(0)$

よって，$f(x)$ の最小値は　$f(0)=\boldsymbol{\dfrac{1}{18}}$

グラフのイメージ