a を実数とする．関数 $f(x)$ を

$$\begin{cases} a\sin x+\cos x & \left(x \leqq \dfrac{\pi}{2}\right) \\ x-\pi & \left(x > \dfrac{\pi}{2}\right) \end{cases}$$

で定義する．このとき，次の問に答えよ．

(1)　$f(x)$ が $x=\dfrac{\pi}{2}$ で連続となる a の値を求めよ．

(2)　(1) で求めた a の値に対し，$x=\dfrac{\pi}{2}$ で $f(x)$ は微分可能でないことを示せ．

〔2007　神大 理系 後期〕

〔解答例〕

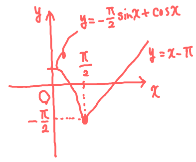
(1)　$f(x)$ が $x=\dfrac{\pi}{2}$ で連続となるのは $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} f(x)=f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ であるから

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0} f(x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}+0} f(x)=f\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=a\underbrace{\sin\frac{\pi}{2}}_{1}+\underbrace{\cos\frac{\pi}{2}}_{0}=a$

よって　$\boldsymbol{a=-\dfrac{\pi}{2}}$

(2)　(1) より



$$f(x)=\begin{cases} -\dfrac{\pi}{2}\sin x+\cos x & \left(x \leqq \dfrac{\pi}{2}\right) \\ x-\pi & \left(x > \dfrac{\pi}{2}\right) \end{cases}$$

$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{\pi}{2}$

$$\lim_{h\to-0}\frac{f\left(\frac{\pi}{2}+h\right)-f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{h}=\lim_{h\to-0}\frac{-\frac{\pi}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}+h\right)+\cos\left(\frac{\pi}{2}+h\right)-\left(-\frac{\pi}{2}\right)}{h}$$

$$=\lim_{h\to-0}\frac{-\frac{\pi}{2}\cos h-\sin h+\frac{\pi}{2}}{h}$$

$\sin\left(\frac{\pi}{2}+h\right)=\cos h$
$\cos\left(\frac{\pi}{2}+h\right)=-\sin h$

$$=\lim_{h\to-0}\left\{\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1-\cos h}{h^2}\cdot h-\frac{\sin h}{h}\right\}$$

$\displaystyle\lim_{\theta\to0}\frac{1-\cos\theta}{\theta^2}=\frac{1}{2}$
$\displaystyle\lim_{\theta\to0}\frac{\sin\theta}{\theta}=1$

$$=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot0-1$$

$$=-1 \quad \cdots\cdots①$$

$$\lim_{h\to+0}\frac{f\left(\frac{\pi}{2}+h\right)-f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{h}=\lim_{h\to+0}\frac{\left(\frac{\pi}{2}+h-\pi\right)-\left(-\frac{\pi}{2}\right)}{h}$$

$$=\lim_{h\to+0}\frac{h}{h}$$

$$=1 \quad \cdots\cdots②$$

① ≠ ② なので $\displaystyle\lim_{h\to-0}\frac{f\left(\frac{\pi}{2}+h\right)-f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{h}\neq\lim_{h\to+0}\frac{f\left(\frac{\pi}{2}+h\right)-f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{h}$

すなわち $\displaystyle\lim_{h\to0}\frac{f\left(\frac{\pi}{2}+h\right)-f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{h}$ は存在しない．

よって　$x=\dfrac{\pi}{2}$ で $f(x)$ は微分可能でない．

定義通り示す！
連続だけど微分可能でない例でした．