

1 $f(x), g(x)$ は微分可能な関数とする. 次の導関数の等式が成り立つことを示せ.

$$(1) \quad \{f(x)g(x)\}' = f'g(x) + f(x)g'(x) \quad \leftarrow \text{積の微分}$$

$$(2) \quad \left\{ \frac{f(x)}{g(x)} \right\}' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2} \quad (\text{ただし, } g(x) \neq 0 \text{ とする}) \quad \leftarrow \text{商の微分}$$

[解答例]

$$(1) \quad F(x) = f(x)g(x)$$

とすると

$$\begin{aligned} F'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \quad \leftarrow -f(x)g(x+h) + f(x)g(x+h) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h) + f(x)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \frac{f(x+h) - f(x)}{h} g(x+h) + f(x) \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right\} \\ &= f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \end{aligned}$$

よって, 示された.

$$(2) \quad G(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

とすると

$$\begin{aligned} G'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{G(x+h) - G(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{f(x+h)}{g(x+h)} - \frac{f(x)}{g(x)}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)g(x) - f(x)g(x+h)}{hg(x+h)g(x)} \quad \leftarrow -f(x)g(x) + f(x)g(x) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)g(x) - f(x)g(x) + f(x)g(x) - f(x)g(x+h)}{hg(x+h)g(x)} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{f(x+h) - f(x)}{h} g(x) - f(x) \frac{g(x+h) - g(x)}{h}}{g(x+h)g(x)} \\ &= \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2} \end{aligned}$$

よって, 示された.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x)$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = g'(x)$$