数学Ⅰ　2次関数

~高校数学のまとめ~

教科書をもとに定義や定理を独自にパネル形式でまとめています．
何度も書き直し，加筆修正を繰り返しており，完成したものではありません．
人によっては不要な部分もあるでしょう．そういうときは読み飛ばしてください．

関数

2つの変数 x，y があって

x の値（あたい）を定めると それに応じて y の値がただ1つだけ定まることを

y は x の **関数**（かんすう） という．

㊕ $y=2x$ の関係は $x=1$ とすると $y=2$ と y の値がただ1つだけ定まる．
x の値を定めると y の値が1つだけ定まるので「y は x の関数」である．

㊟ $y^2=x$ の関係は $x=1$ とすると $y^2=1$ であるから $y=\pm 1$
これは y の値が2つ決まり，y がただ1つ決まらないので「y は x の関数」ではない．

定義域と値域

y が x の関数であるとき

$\boxed{1}$ 変数 x のとりうる値の範囲を
定義域（ていぎいき） または x の**変域**（へんいき） という．

$\boxed{2}$ x が定義域全体を動くとき変数 y がとる値の範囲を
値域（ちいき） または y の**変域**（へんいき） という．

㊕ 関数 $y=2x\ (0\leqq x\leqq 1)$ について
$\boxed{1}$ 定義域は $0\leqq x\leqq 1$
$\boxed{2}$ 定義域 $0\leqq x\leqq 1$ 全体を x が動くときの y のとる値の範囲は $0\leqq y\leqq 2$
値域は $0\leqq y\leqq 2$

関数の表記

y が x の関数であることを $y=f(x)$ と表す．

関数 $y=f(x)$ において，x の値 a に対応して定まる y の値を $f(a)$ で表し

$x=a$ のときの 関数 $f(x)$ の **値** という．

㊕ 関数 $y=2x+1$ について $f(x)=2x+1$ として $y=f(x)$ と表せる．
$x=a$ のとき $y=2a+1$ であることは $f(a)=2a+1$
$x=1$ のとき $y=2\cdot 1+1=3$ であることは $f(1)=2\cdot 1+1=3$
$x=-1$ のとき $y=2\cdot(-1)+1=-1$ であることは $f(-1)=2\cdot(-1)+1=-1$

座標平面

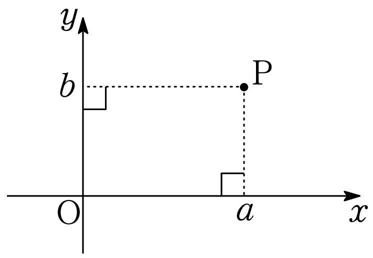
平面上に直交する 2 つの座標軸（ざひょうじく）を定めると

その平面上の点 P の位置は右の下の図のように 2 つの実数の組 $(a,\, b)$ で表される．

これを点 P の座標（ざひょう）といい $\mathrm{P}(a,\, b)$ とかく．

また 座標軸の交点を **原点**（げんてん） といい $\mathrm{O}(0,\, 0)$ とかく．

座標軸の定められた平面を **座標平面**（ざひょうへいめん） という．



とくに何も条件がないとき，座標平面の座標軸は x 軸，y 軸として考える．

座標平面の象限

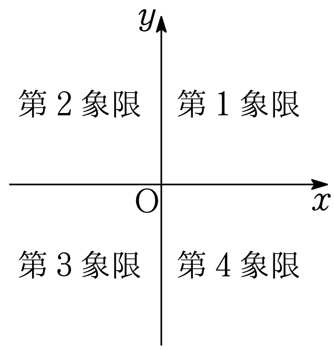
座標平面を座標軸により 4 つの部分に分けて，次のようにいう．

$\boxed{1}$ $\{(x,\, y) \mid x > 0$ かつ $y > 0\}$ を **第 1 象限**（しょうげん）

$\boxed{2}$ $\{(x,\, y) \mid x < 0$ かつ $y > 0\}$ を **第 2 象限**

$\boxed{3}$ $\{(x,\, y) \mid x < 0$ かつ $y < 0\}$ を **第 3 象限**

$\boxed{4}$ $\{(x,\, y) \mid x > 0$ かつ $y < 0\}$ を **第 4 象限**



ただし

$\{(x,\, y) \mid x = 0$ または $y = 0\}$（座標軸）はどの象限にも含まれない．

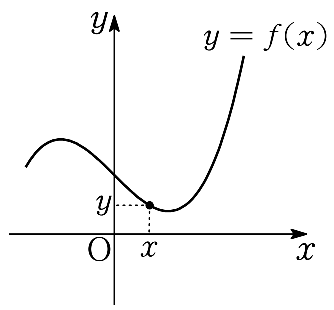
関数のグラフ

関数 $y = f(x)$ について

$\{(x,\, y) \mid y = f(x)\}$ の点全体からなる図形を

座標平面に表したものを

関数 $y = f(x)$ の **グラフ** という．



定数関数

関数 $y=f(x)$ について

$\boxed{1}$ どのように x の値を定めても，y が一定の値をとる

$\boxed{2}$ 定義域内の 2 つの値 a，b に対し，常に $f(a)=f(b)$

これを満たすものを **定数関数**（ていすうかんすう）という．

定数関数は c を定数として

$$y=c \quad \text{または} \quad f(x)=c$$

の形で表される．

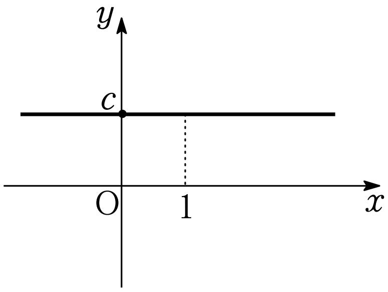
㊎ $y=5$，$f(x)=5$

定数関数のグラフ

座標平面で

　定数関数 $y=c$

のグラフは **直線**（ちょくせん）であり，次のような概形（がいけい）になる．



このグラフについて

$\boxed{1}$ 傾（かたむ）きが 0

$\boxed{2}$ y 切片（せっぺん）が c

1次関数

x の1次式で表される関数を x の **1次関数** という．

x の1次関数 y は a，b を定数として

$$y = ax + b \ (a \neq 0)$$

の形で表される．

㊑ $y = 3x + 2$

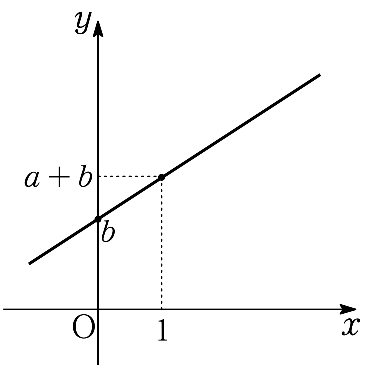
1次関数のグラフ

座標平面で

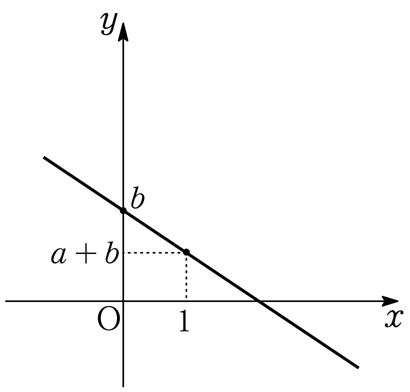
$$1\text{次関数 } y = ax + b \ (a \neq 0)$$

のグラフは直線（ちょくせん）であり，次のような概形（がいけい）となる．

〔$a > 0$ のとき〕



〔$a < 0$ のとき〕



このグラフについて

$\boxed{1}$ 傾きが a

$\boxed{2}$ y 切片が b

$\boxed{3}$ $\begin{cases} \text{右上がり} & (a > 0) \\ \text{右下がり} & (a < 0) \end{cases}$

㊟ $a = 0$ のとき定数関数 $y = b$ となり，グラフは「傾きが0の直線」になる．

2 次関数

x の 2 次式で表される関数を x の **2 次関数** という.

x の 2 次関数 y は a, b, c を定数として

$$y = ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0)$$

の形で表される.

例 $y = 2x^2 + 3x + 1$

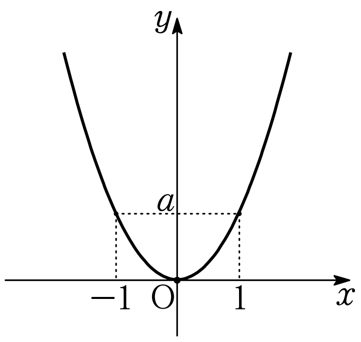
頂点が原点の 2 次関数のグラフ

座標平面で

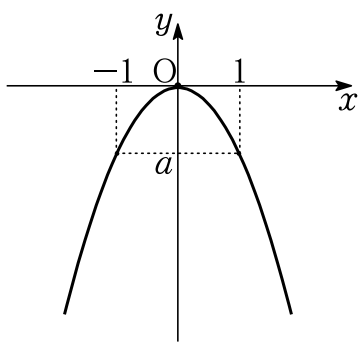
$$2 次関数\ y = ax^2 \quad (a \neq 0)$$

のグラフは**放物線**(ほうぶつせん)であり, 次のような概形(がいけい)になる.

〔$a > 0$ のとき〕



〔$a < 0$ のとき〕



このグラフについて

$\boxed{1}$ 軸(じく)の方程式は $x = 0$

$\boxed{2}$ 頂点(ちょうてん)は $(0, 0)$

$\boxed{3}$ $\begin{cases} 下に凸 & (a > 0) \\ 上に凸 & (a < 0) \end{cases}$

比例を表す式

y が x の関数で a を定数として $y = ax$ と表されるとき

y は x に **比例**（ひれい）する という．

このとき a を **比例定数**（ひれいていすう）という．

例 $y = 3x$ について y は x に比例する．次の表のような値をとることもわかる．

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	$\cdots$
y	3	6	9	12	15	18	21	24	27	$\cdots$

グラフは原点を通り傾き 3 の直線である．

2乗の比例を表す式

y が x の関数で a を定数として $y = ax^2$ と表されるとき

y は x の 2 乗に **比例**（ひれい）する という．

このとき a を **比例定数**（ひれいていすう）という．

例 $y = 3x^2$ について y は x^2 に比例する．次の表のような値をとることもわかる．

x	$\cdots$	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	$\cdots$
y	$\cdots$	48	27	12	3	0	3	12	27	48	$\cdots$

$x = \pm k$ のとき $y = 3(\pm k)^2 = 3k^2$

グラフは原点が頂点で y 軸に対称な下に凸の放物線である．

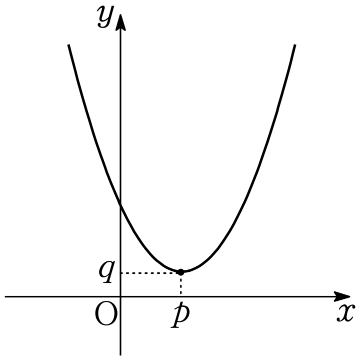
標準形の2次関数のグラフ

座標平面で

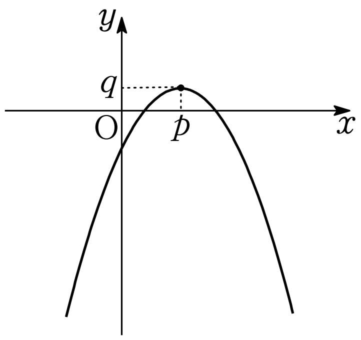
　2次関数 $y=a(x-p)^2+q\ (a \neq 0)$

のグラフは **放物線** であり，次のような概形となる．

〔$a>0$ のとき〕



〔$a<0$ のとき〕



このグラフについて

$\boxed{1}$ 頂点の座標は $(p,\ q)$

$\boxed{2}$ 軸の方程式は $x=p$

$\boxed{3}$ $\begin{cases} \text{下に凸} & (a>0) \\ \text{上に凸} & (a<0) \end{cases}$

$\boxed{4}$ 定義域は実数全体

$\boxed{5}$ 値域は $\begin{cases} y \geqq q & (a>0) \\ y \leqq q & (a<0) \end{cases}$

$\boxed{6}$ $y=ax^2\ (a \neq 0)$ のグラフを

　x 軸方向に p，y 軸方向に q だけ平行移動したグラフ

補 2次関数のグラフは放物線で，x^2 の係数 a の符号で上に凸か下に凸かの概形が決まる．
実は $y=ax^2$ と $y=ax^2+bx+c$ のグラフは同じ形（合同）で頂点が違うだけである．
つまり x^2 の係数が同じ2次関数のグラフは同じ形の放物線になる．
例えば

$$y=2x^2,\ y=2(x-1)^2+3,\ y=2x^2-x+1,\ y=2(x-1)(x-3)$$

これらは x^2 の係数がすべて2で，頂点が違うだけで同じ形の放物線である．

平方完成

x の 2 次式 ax^2+bx+c を $a(x-p)^2+q$ の形にすることを

x について **平方完成**(へいほうかんせい)する という．

基本的な平方完成

$$x^2+\square\,x=\left(x+\frac{\square}{2}\right)^2-\left(\frac{\square}{2}\right)^2$$

$\times\frac{1}{2}$（半分）　　2 乗してひく

㊞例 $x^2+3x=\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}$

㊞補 x^2 の係数は 1

2 次式の平方完成の方法

x の 2 次式 ax^2+bx+c は次のように平方完成できる．

$$\begin{aligned}
ax^2+bx+c&=a\left(x^2+\frac{b}{a}x\right)+c &&\leftarrow x^2 \text{ の係数 } a \text{ で定数項以外をくくる}\\
&=a\left\{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}\right\}+c &&\leftarrow \text{基本的な平方完成}\\
&=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a}+c &&\leftarrow \text{展開}\\
&=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a} &&\leftarrow (\quad)^2 \text{ の外を整理}
\end{aligned}$$

㊞例
$$\begin{aligned}
2x^2+6x+1&=2(x^2+3x)+1\\
&=2\left\{\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}\right\}+1\\
&=2\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{2}+1\\
&=2\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{7}{2}
\end{aligned}$$

平方完成と放物線の頂点の座標

$a \neq 0$ とする．

$\boxed{1}$ $y = a(x-p)^2 + q$ のグラフの頂点の座標は $(p,\ q)$

$\boxed{2}$ $y = ax^2 + bx + c = a\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{b^2 - 4ac}{4a}$ のグラフの

頂点の座標は $\left(-\dfrac{b}{2a},\ -\dfrac{b^2-4ac}{4a}\right)$

例 $y = 2x^2 + 6x + 1 = 2\left(x + \dfrac{3}{2}\right)^2 - \dfrac{7}{2}$ の頂点の座標は $\left(-\dfrac{3}{2},\ -\dfrac{7}{2}\right)$

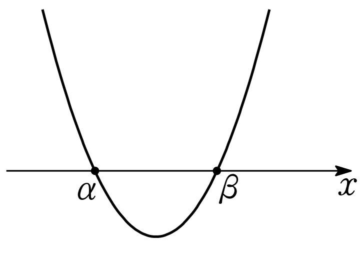
因数分解と 2 次関数のグラフ

座標平面で

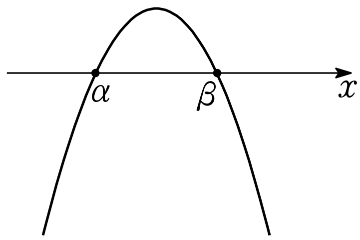
$$2\text{次関数}\ y = a(x-\alpha)(x-\beta)\ \ (a \neq 0)$$

のグラフは **放物線** であり $\alpha < \beta$ とすると次のような概形になる．

〔$a > 0$ のとき〕



〔$a < 0$ のとき〕



このグラフについて

$\boxed{1}$ x 軸上の 2 点 $(\alpha,\ 0)$，$(\beta,\ 0)$ を通る．

$\boxed{2}$ 軸の方程式は $x = \dfrac{\alpha + \beta}{2}$

$\boxed{3}$ $\begin{cases} \text{下に凸} & (a > 0) \\ \text{上に凸} & (a < 0) \end{cases}$

例 $\alpha = \beta$ ならば $y = a(x-\alpha)^2$

2 次関数の式の形

x の 2 次関数は次のような式で表される．

ただし a，b，c，p，q，α，β はすべて実数，$a \neq 0$ とする．

$\boxed{1}$ $y = ax^2 + bx + c$

$\boxed{2}$ $y = a(x-p)^2 + q$ ← 頂点の座標が $(p,\ q)$，軸の方程式が $x = p$ とわかる形

$\boxed{3}$ $y = a(x-\alpha)(x-\beta)$ ← x 軸と $(\alpha,\ 0)$，$(\beta,\ 0)$ で共有点をもつことがわかる形

$\boxed{1}$，$\boxed{2}$，$\boxed{3}$ のグラフの概形はすべて $y = ax^2$ と同じ形の放物線である．

例 $\boxed{1}$ $y = 2x^2 - 8x + 6$

$\boxed{2}$ $y = 2(x-2)^2 - 2$

$\boxed{3}$ $y = 2(x-1)(x-3)$

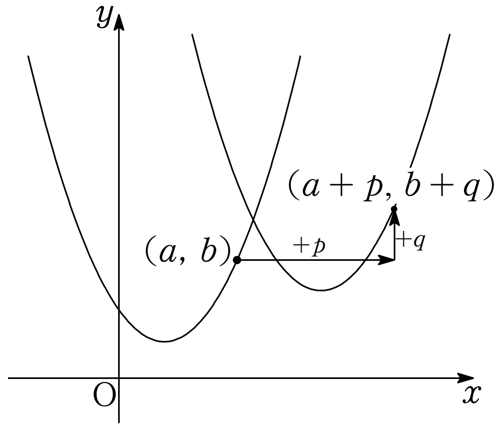
$\boxed{1}$，$\boxed{2}$，$\boxed{3}$ はいずれも $y = 2x^2$ と同じ形の放物線である．

平行移動

図形上の各点を，同じ方向に一定の距離だけ動かすことを **平行移動**（へいこういどう）という．
図形は位置を変えるだけでその形や大きさを変えない．

座標平面における平行移動

座標平面において



$\boxed{1}$ 点 $(a,\ b)$ を

x 軸方向に p，y 軸方向に q

だけ平行移動すると

点 $(a+p,\ b+q)$

$\boxed{2}$ $y=f(x)$ を

x 軸方向に p，y 軸方向に q

だけ平行移動すると

$$y-q=f(x-p) \iff y=f(x-p)+q$$

考 $\boxed{2}$ 点 $(x,\ y)$ を x 軸方向に p，y 軸方向に q だけ平行移動した点を点 $(X,\ Y)$ とすると

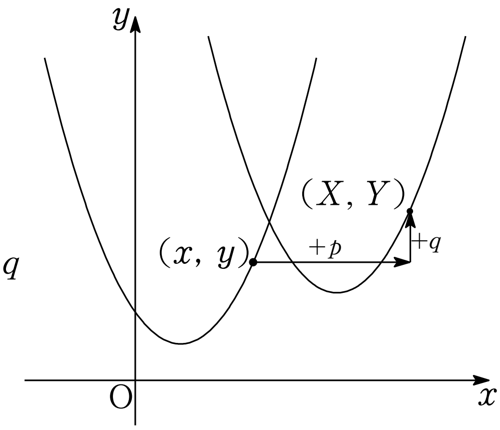
$$\begin{cases} x+p=X \\ y+q=Y \end{cases} \quad \text{すなわち} \quad \begin{cases} x=X-p \\ y=Y-q \end{cases}$$

の関係が成り立つことから

$$y=f(x) \iff Y-q=f(X-p)$$

すなわち，点 $(x,\ y)$ を x 軸方向に p，y 軸方向に q だけ平行移動した点の集合は

$$\{(X,\ Y)\,|\,Y-q=f(X-p)\}$$
$$=\{(x,\ y)\,|\,y-q=f(x-p)\}$$



要

座標平面で

x を $x-p$ かつ y を $y-q$ に置きかえると

x 軸方向に p，y 軸方向に q だけ平行移動される．

補 点 $(x-p,\ y-q)$ を x 軸方向に p，y 軸方向に q だけ平行移動すると点 $(x,\ y)$ となる．

直線に関する対称移動

図形上の各点をある直線に関して対称な点にうつすことを

ある直線に関する **対称移動**（たいしょういどう） または **折り返し**（おりかえし） という.

図形は位置を変えるだけでその形や大きさを変えない.

座標平面における x 軸に関する対称移動

座標平面において

$\boxed{1}$ 点 $(s,\ t)$ を

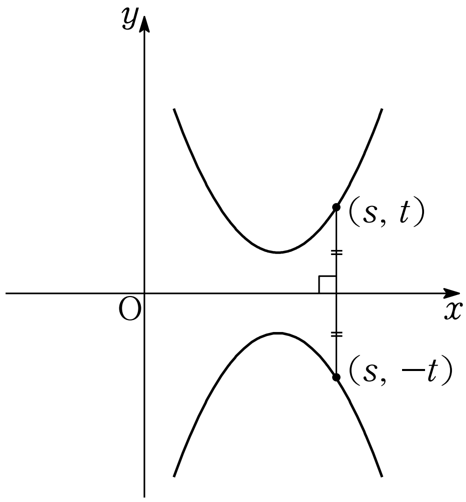
x 軸に関して対称移動すると

点 $(s,\ -t)$

$\boxed{2}$ $y=f(x)$ を

x 軸に関して対称移動すると

$$-y=f(x) \iff y=-f(x)$$



考 $\boxed{2}$ 点 $(x,\ y)$ を x 軸に関して対称移動した点を

点 $(X,\ Y)$ とすると

$$\begin{cases} x=X \\ y=-Y \end{cases}$$

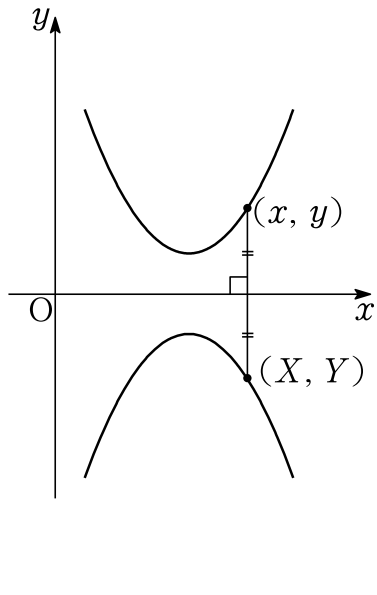
の関係が成り立つことから

$$y=f(x) \iff -Y=f(X)$$

すなわち，点 $(x,\ y)$ を x 軸に関して対称移動

した点の集合は

$$\{(X,\ Y)\mid -Y=f(X)\}=\{(x,\ y)\mid -y=f(x)\}$$



要

座標平面で

y を $-y$ に置きかえると x 軸に関して対称移動される.

補 点 $(x,\ -y)$ を x 軸に関して対称移動すると点 $(x,\ y)$ となる.

座標平面における y 軸に関する対称移動

座標平面において

$\boxed{1}$ 点 $(s,\ t)$ を

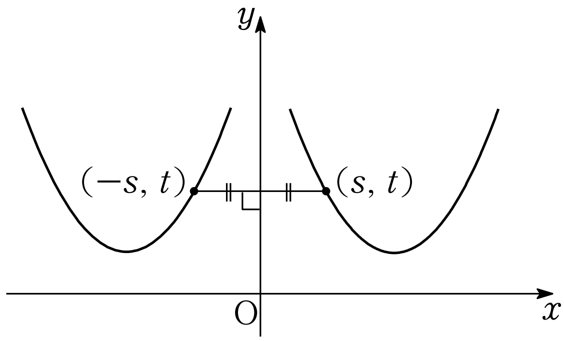
y 軸に関して対称移動すると

点 $(-s,\ t)$

$\boxed{2}$ $y=f(x)$ を

y 軸に関して対称移動すると

$y=f(-x)$



考 $\boxed{2}$ 点 $(x,\ y)$ を y 軸に関して対称移動した点を点 $(X,\ Y)$ とすると

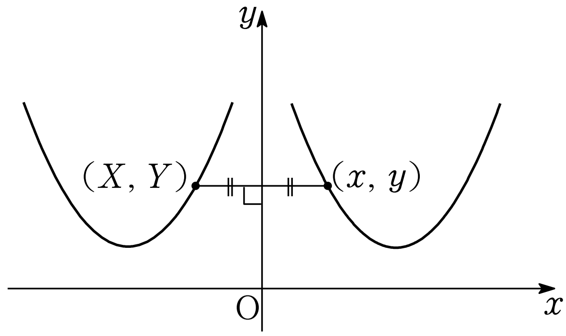
$$\begin{cases} x=-X \\ y=Y \end{cases}$$

の関係が成り立つことから

$$y=f(x) \iff Y=f(-X)$$

すなわち，点 $(x,\ y)$ を x 軸に関して対称移動した点の集合は

$$\{(X,\ Y)\,|\,Y=f(-X)\}=\{(x,\ y)\,|\,y=f(-x)\}$$



要

座標平面で

x を $-x$ に置きえると y 軸に関して対称移動される．

補 点 $(-x,\ y)$ を y 軸に関して対称移動すると点 $(x,\ y)$ となる．

座標平面における x 軸に平行な直線に関する対称移動

座標平面において

$\boxed{1}$ 点 $(s,\,t)$ を

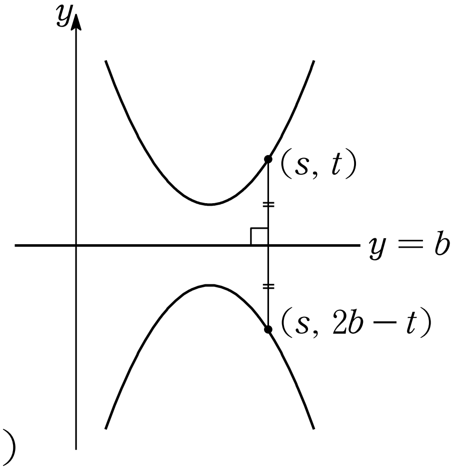
直線 $y=b$ に関して対称移動すると

点 $(s,\,2b-t)$

$\boxed{2}$ $y=f(x)$ を

直線 $y=b$ に関して対称移動すると

$$2b-y=f(x) \iff y=2b-f(x)$$



考 $\boxed{2}$ 点 $(x,\,y)$ を直線 $y=b$ に関して対称移動した点を点 $(X,\,Y)$ とすると

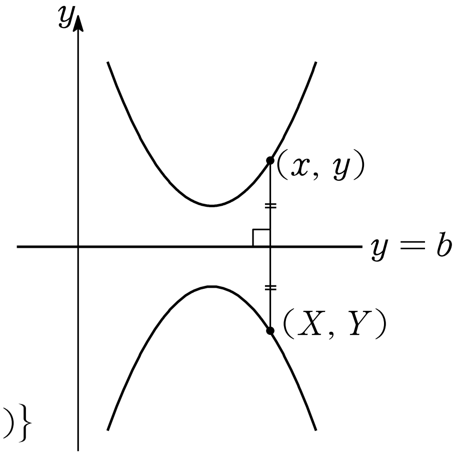
$$\begin{cases} x=X \\ \dfrac{y+Y}{2}=b \end{cases} \quad \text{すなわち} \quad \begin{cases} x=Y \\ y=2b-Y \end{cases}$$

の関係が成り立つことから

$$y=f(x) \iff 2b-Y=f(X)$$

すなわち，点 $(x,\,y)$ を直線 $y=b$ に関して対称移動した点の集合は

$$\{(X,\,Y)\,|\,2b-Y=f(X)\}=\{(x,\,y)\,|\,2b-y=f(x)\}$$



要

座標平面で

y を $2b-y$ に置きかえると直線 $y=b$ に関して対称移動される.

補 $b=0$ のときは x 軸対称である.

座標平面における y 軸に平行な直線に関する対称移動

座標平面において

$\boxed{1}$ 点 $(s,\ t)$ を

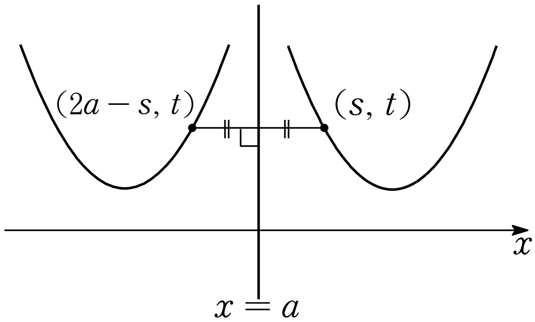
直線 $x=a$ に関して対称移動すると

点 $(2a-s,\ t)$

$\boxed{2}$ $y=f(x)$ を

直線 $x=a$ に関して対称移動すると

$y=f(2a-x)$



考 $\boxed{2}$ 点 $(x,\ y)$ を直線 $x=a$ に関して対称移動した点を

点 $(X,\ Y)$ とすると

$$\begin{cases} \dfrac{x+X}{2}=a \\ y=Y \end{cases} \quad \text{すなわち} \quad \begin{cases} x=2a-X \\ y=Y \end{cases}$$

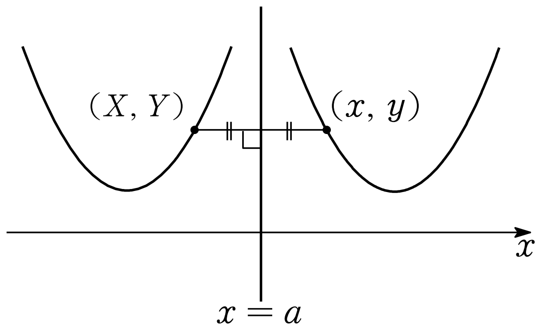
の関係が成り立つことから

$$y=f(x) \iff Y=f(2a-X)$$

すなわち，点 $(x,\ y)$ を x 軸に関して対称移動

した点の集合は

$$\{(X,\ Y)\,|\,Y=f(2a-X)\{=\{(x,\ y)\,|\,y=f(2a-x)\}$$



要

座標平面で

x を $2a-x$ に置きかえると 直線 $x=a$ に関して対称移動される．

補 $a=0$ とすると y 軸対称である．

点に関する対称移動

図形上の各点をある点に関して対称な点にうつすことを

ある点に関する **対称移動**（たいしょういどう） または **折り返し**（おりかえし） という．

図形は位置を変えるだけでその形や大きさを変えない．

座標平面における原点に関する対称移動

座標平面において

1. 点 $(s,\ t)$ を

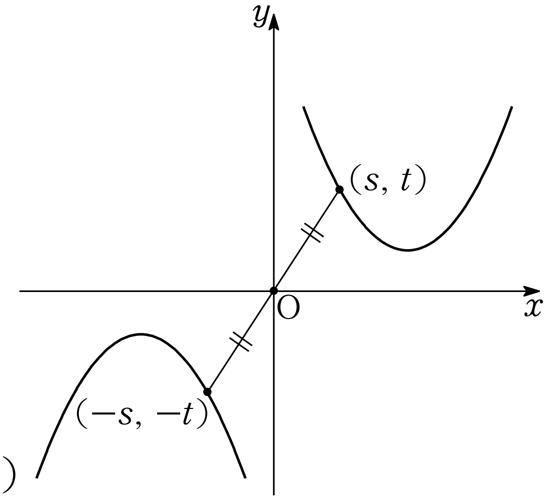
   原点に関して対称移動すると

   点 $(-s,\ -t)$

2. $y=f(x)$ を

   原点に関して対称移動すると

   $-y=f(-x) \iff y=-f(-x)$



㊆ ② 点 $(x,\ y)$ を原点に関して対称移動した点を

点 $(X,\ Y)$ とすると

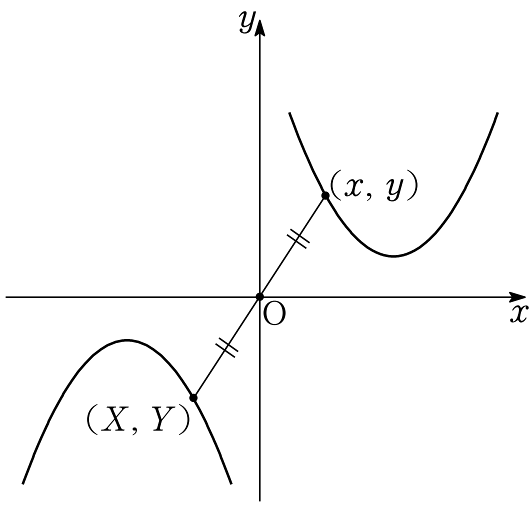
$$\begin{cases} x=-X \\ y=-Y \end{cases}$$

の関係が成り立つことから

$$y=f(x) \iff -Y=f(-X)$$

すなわち，点 $(x,\ y)$ を x 軸に関して対称移動した点の集合は

$$\{(X,\ Y) \mid -Y=f(-X)\}$$
$$=\{(x,\ y) \mid -y=f(-x)\}$$



㊮

座標平面で

x を $-x$ かつ y を $-y$ に置きかえると**原点**に関して対称移動される．

㊭ 点 $(-x,\ -y)$ を原点に関して対称移動すると点 $(x,\ y)$ となる．

座標平面における点に関する対称移動

座標平面において

1 点 $(s,\ t)$ を

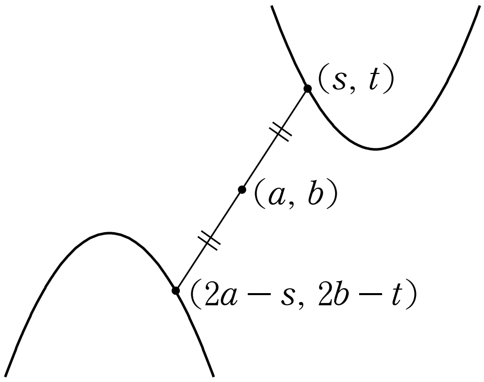
点 $(a,\ b)$ に関して対称移動すると

点 $(2a-s,\ 2b-t)$

2 $y=f(x)$ を

点 $(a,\ b)$ に関して対称移動すると

$$2b-y=f(2a-x) \iff y=2b-f(2a-x)$$



考 2 点 $(x,\ y)$ を点 $(a,\ b)$ に関して対称移動した点を

点 $(X,\ Y)$ とすると

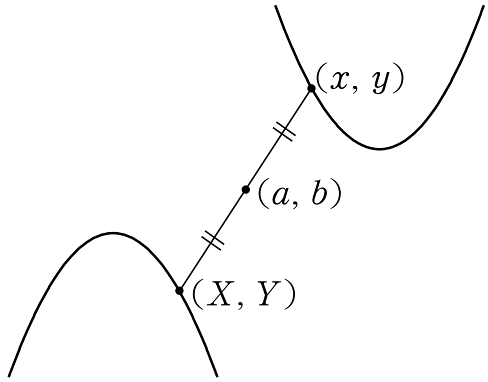
$$\begin{cases} \dfrac{x+X}{2}=a \\ \dfrac{y+Y}{2}=b \end{cases} \quad \text{すなわち} \quad \begin{cases} x=2a-X \\ y=2b-Y \end{cases}$$

の関係が成り立つことから

$$y=f(x) \iff 2b-Y=f(2a-X)$$

すなわち，点 $(x,\ y)$ を点 $(a,\ b)$ に関して対称移動した点の集合は

$$\{(X,\ Y)\,|\,2b-Y=f(2a-X)\}=\{(x,\ y)\,|\,2b-y=f(2a-x)\}$$



要

座標平面で x を $2a-x$ かつ y を $2b-y$ に置きかえると

点 $(a,\ b)$ に関して対称移動される．

補 $(a,\ b)=(0,\ 0)$ とすると原点に関しての対称移動となる．

2次関数のグラフの平行移動

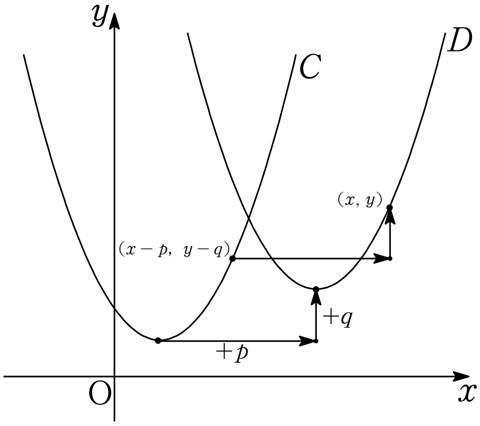
座標平面において

放物線 $C : y = ax^2 + bx + c \ (a \neq 0)$ を

x 軸方向に p

y 軸方向に q

だけ平行移動した放物線を D とすると



1 2つの放物線 C と D は $y = ax^2$ と同じ形

2 C の頂点は D の頂点に移される．

3 C で x を $x-p$，y を $y-q$ と置きかえると D の式になる．

つまり $D : y - q = a(x-p)^2 + b(x-p) + c$

例 $y = 2x^2$ を x 軸方向に 2，y 軸方向に 1 だけ平行移動した放物線の方程式は

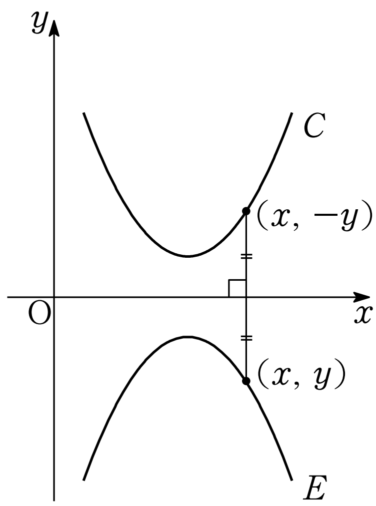
$y - 1 = 2(x-2)^2$ すなわち $y = 2(x-2)^2 + 1$

2次関数のグラフの x 軸に関する対称移動

座標平面において

放物線 $C : y = ax^2 + bx + c \ (a \neq 0)$ を

x 軸に関して対称移動した放物線を E とすると



1 E は $y = -ax^2$ と同じ形

2 C の頂点は E の頂点に移される．

3 C で y を $-y$ と置きかえると E の式になる．

つまり $E : -y = ax^2 + bx + c$

すなわち $E : y = -ax^2 - bx - c$

例 $y = 2x^2 - 4x + 5$ を x 軸に関して対称移動した放物線の方程式は

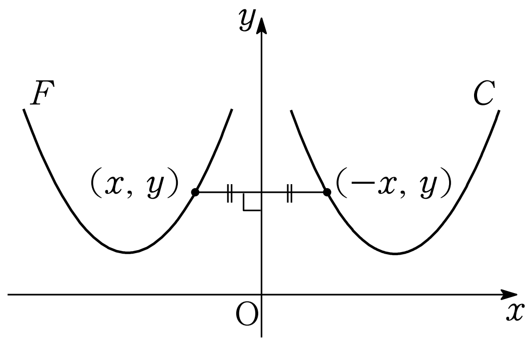
$-y = 2x^2 - 4x + 5$ すなわち $y = -2x^2 + 4x - 5$

2次関数のグラフの y 軸に関する対称移動

座標平面において

放物線 $C: y=ax^2+bx+c\ (a \neq 0)$ を

y 軸に関して対称移動した放物線を F とすると



$\boxed{1}$ 2つの放物線 C と F は $y=ax^2$ と同じ形

$\boxed{2}$ C の頂点は F の頂点に移される.

$\boxed{3}$ C で x を $-x$ と置きかえると F の式になる.

つまり $F: y=a(-x)^2+b(-x)+c$

すなわち $F: y=ax^2-bx+c$

㊄ $y=2x^2-4x+5$ を y 軸に関して対称移動した放物線の方程式は

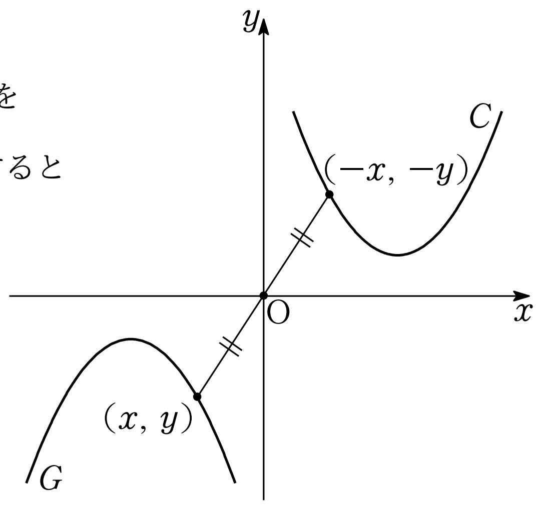
$y=2(-x)^2-4(-x)+5$ すなわち $y=2x^2+4x+5$

2次関数のグラフの原点に関する対称移動

座標平面において

放物線 $C: y=ax^2+bx+c\ (a \neq 0)$ を

原点Oに関して対称移動した放物線を G とすると



$\boxed{1}$ G は $y=-ax^2$ と同じ形

$\boxed{2}$ C の頂点は G の頂点に移される.

$\boxed{3}$ C で x を $-x$ かつ y を $-y$ と

置きかえると G の式になる.

つまり $G: -y=a(-x)^2+b(-x)+c$

すなわち $G: y=-ax^2+bx-c$

㊄ $y=2x^2-4x+5$ を原点に関して対称移動した放物線の方程式は

$-y=2(-x)^2-4(-x)+5$ すなわち $y=-2x^2-4x-5$

関数の最大値・最小値

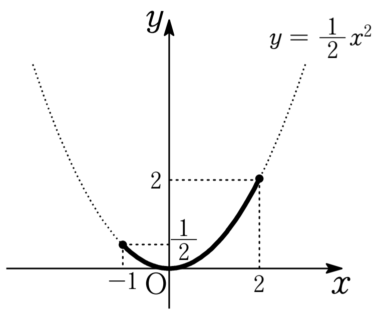
1 x の関数 $y=f(x)$ の 最大値(さいだいち) とは

$y \leqq M$ かつ $y=M$ となる x が存在するときの M

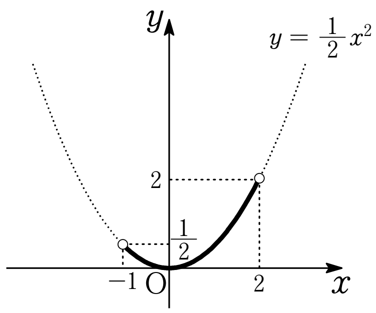
2 x の関数 $y=f(x)$ の 最小値(さいしょうち) とは

$y \geqq m$ かつ $y=m$ となる x が存在するときの m

㊎ 関数 $y=\dfrac{1}{2}x^2\ (-1 \leqq x \leqq 2)$ について
グラフは頂点の座標 $(0,\ 0)$，下に凸
右のグラフより $0 \leqq y \leqq 2$
よって，最大値は **2** $(x=2)$
　　　最小値は **0** $(x=0)$



㊎ 関数 $y=\dfrac{1}{2}x^2\ (-1 < x < 2)$ について
グラフは頂点の座標 $(0,\ 0)$，下に凸
右のグラフより $0 \leqq y < 2$
よって，最大値は **なし**
　　　最小値は **0** $(x=0)$



㊗ 2 次関数 $y=f(x)$ の最大値，最小値は定義域に注意して値域をみるとよいが，
頂点の座標，軸の位置，上に凸か下に凸か調べ，グラフをイメージするとわかる．
特に定義域内に頂点があれば，その点で最大値または最小値をとる．

Ⓖ 下に凸の 2 次関数の $a \leqq x \leqq b$ における最大値・最小値

Ⓖ 上に凸の 2 次関数の $a \leqq x \leqq b$ における最大値・最小値

2次方程式

$$ax^2+bx+c=0 \quad (a,\ b,\ c \text{ は実数}，\ a \neq 0)$$

の形で表される x の方程式を x についての **2次方程式**（じほうていしき）という．

2次方程式を満たす x の値を2次方程式の **解**（かい）といい，

2次方程式の解をすべて求めることを2次方程式を **解く**（と）という．

2次方程式の解の個数は **高々2個**（たかだか）である．

とくに 解がただ1つとなるとき，その解を **重解**（じゅうかい）または **重複解**（ちょうふくかい）という．

㊓「高々2個」とは「多くとも2個」「2個以下」という意味である．

(話) 代数学では解を根（こん）といい，重解は重根という．
解は方程式を満たす値の集合の要素と解釈できる．

因数分解された形の2次方程式の解

$a \neq 0$ とする.

$\boxed{1}$ x の2次方程式 $a(x-\alpha)(x-\beta)=0$ の解は $x=\alpha,\ \beta$

$\boxed{2}$ x の2次方程式 $a(x-\alpha)^2=0$ の解は $x=\alpha$

$\boxed{1}$ で $\alpha=\beta$ となる場合が $\boxed{2}$ である.

$\boxed{2}$ のようなただ1つの解を **重解** という.

例 $\boxed{1}$ 2次方程式 $2(x-1)(x-2)=0$ の解は $x=1,\ 2$

$\boxed{2}$ 2次方程式 $2(x-1)^2=0$ の解は $x=1$ (重解)

平方の形と2次方程式の解

k を実数とする.

$\boxed{1}$ X の2次方程式 $X^2=k$ の解は $X=\pm\sqrt{k}$

$\boxed{2}$ X の2次方程式 $(x-\alpha)^2=k$ の解は

$x-\alpha=\pm\sqrt{k}$ すなわち $x=\alpha\pm\sqrt{k}$

考 $\boxed{2}$ 2次方程式 $(x-\alpha)^2=k$ で $x-\alpha=X$ とおくと $X^2=k$ となり $\boxed{1}$ の形になる.

$x-\alpha=\pm\sqrt{k}$ すなわち $x=\alpha\pm\sqrt{k}$

例 $\boxed{1}$ 2次方程式 $x^2=2$ の解は $x=\pm\sqrt{2}$

$\boxed{2}$ 2次方程式 $(x-1)^2=2$ の解は $x-1=\pm\sqrt{2}$ すなわち $x=1\pm\sqrt{2}$

2次方程式の解の公式 I

a，b，c は実数，$a \neq 0$ とする．

x の2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解は

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

考　2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の左辺を平方完成して

$$a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}=0 \quad \text{すなわち} \quad \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$$

これより　$x+\dfrac{b}{2a}=\pm\sqrt{\dfrac{b^2-4ac}{4a^2}}$

よって

$$x=-\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

例　2次方程式 $x^2+3x-1=0$ の解は　$x=\dfrac{-3\pm\sqrt{3^2-4\cdot1\cdot(-1)}}{2\cdot1}=\dfrac{-3\pm\sqrt{13}}{2}$

（$a=1$，$b=3$，$c=-1$ として公式にあてはめている）

2次方程式の解の公式 II

a，b，c は実数，$a \neq 0$ とする．

x の2次方程式 $ax^2+2b'x+c=0$ の解は

$$x=\frac{-b'\pm\sqrt{b'^2-ac}}{a}$$

考　x の2次方程式 $ax^2+2b'x+c=0$ の解は $\boxed{\text{2次方程式の解の公式 I}}$ で $b=2b'$ として求めると

$$x=\frac{2b'\pm\sqrt{4b'^2-4ac}}{2a}=\frac{2b'\pm\sqrt{4(b'^2-ac)}}{2a}$$

$$=\frac{2b'\pm2\sqrt{b'^2-ac}}{2a}$$

$$=\frac{-b'\pm\sqrt{b'^2-ac}}{a}$$

補　x の係数が偶数のときに有効な公式である．

例　2次方程式 $3x^2+4x-1=0$ の解は　$x=\dfrac{-2\pm\sqrt{2^2-3\cdot(-1)}}{3}=\dfrac{-2\pm\sqrt{7}}{3}$

（$a=3$，$b'=2$，$c=-1$ として公式にあてはめている）

平行の形の2次方程式の実数解の個数

k を実数とする.

x の2次方程式 $x^2 = k$ の解は $x = \pm\sqrt{k}$

次のように k の値で実数解の個数がわかる.

1. $k > 0 \iff$ 異なる2つの実数解をもつ
2. $k = 0 \iff$ ただ1つの実数解（重解）をもつ
3. $k < 0 \iff$ 実数解をもたない

とくに $k \geqq 0 \iff$ 実数解をもつ

補 3 $D < 0$ ならば実数解をもたないが，異なる2つの共役な虚数解をもつ.（数学 II）

考 1 2次方程式 $x^2 = k$ $(k > 0)$ の異なる2つの実数解は $x = -\sqrt{k}, \sqrt{k}$

2 2次方程式 $x^2 = 0$ のただ1つの実数解（重解）は $x = 0$

3 2次方程式 $x^2 = k$ $(k < 0)$ の実数解はない.
ただし $x = \pm\sqrt{-k}\,i$ の共役な虚数解をもつ（数学 II）

2次方程式の判別式

a，b，c は実数，$a \neq 0$ とする.

x の2次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ について

$$b^2 - 4ac$$

を **判別式**（はんべつしき）といい D で表すことがよくある.

補 代数学では「判別式」は多項式から定義される.
高校数学では2次方程式でしか判別式を考えないので，教科書は上のように
$\boxed{\text{2次方程式の解の公式 I}}$ の根号の中の値を判別式としている.

2 次方程式の実数解の個数 I

a, b, c は実数，$a \neq 0$ とする．

x の 2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解は

$D=b^2-4ac$ として $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$

次のように D の値で実数解の個数がわかる．

$\boxed{1}$ $D>0 \iff$ 異なる 2 つの実数解をもつ

$\boxed{2}$ $D=0 \iff$ ただ 1 つの実数解（重解）をもつ

$\boxed{3}$ $D<0 \iff$ 実数解をもたない

とくに $D \geqq 0 \iff$ 実数解をもつ

補 $\boxed{3}$ $D<0$ ならば実数解をもたないが，異なる 2 つの共役な虚数解をもつ．（数学 II）

考 解の公式の根号の中の符号で実数解の個数が決まる．

$\boxed{1}$ 2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ $(D>0)$ の異なる 2 つの実数解は

$$x=\frac{-b-\sqrt{D}}{2a},\ \frac{-b+\sqrt{D}}{2a}$$

$\boxed{2}$ 2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ $(D=0)$ のただ 1 つの実数解（重解）は

$$x=\frac{-b}{2a}$$

$\boxed{3}$ 2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ $(D<0)$ の実数解はない．

ただし $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{-D}\,i}{2a}$ の共役な虚数解をもつ

2 次方程式の実数解の個数 II

a, b, c は実数, $a \neq 0$ とする.

x の 2 次方程式 $ax^2+2b'x+c=0$ について

$\dfrac{D}{4}=b'^2-ac$ として $x=\dfrac{-b'\pm\sqrt{\dfrac{D}{4}}}{a}$

次のように $\dfrac{D}{4}$ の値で実数解の個数がわかる.

$\boxed{1}$ $\dfrac{D}{4}>0 \iff$ 異なる 2 つの実数解をもつ

$\boxed{2}$ $\dfrac{D}{4}=0 \iff$ ただ 1 つの実数解(重解)をもつ

$\boxed{3}$ $\dfrac{D}{4}<0 \iff$ 実数解をもたない

とくに $\dfrac{D}{4}\geqq 0 \iff$ 実数解をもつ

㊟ $\boxed{\text{2 次方程式の実数解の個数 I}}$ と同様である.

$D=(2b')^2-4ac=4(b'^2-ac)$ すなわち $\dfrac{D}{4}=b'^2-ac$

$\boxed{1}$ 2 次方程式 $ax^2+2b'x+c=0\left(\dfrac{D}{4}>0\right)$ の異なる 2 つの実数解は

$$x=\frac{-b'-\sqrt{\dfrac{D}{4}}}{a},\ \frac{-b'+\sqrt{\dfrac{D}{4}}}{a}$$

$\boxed{2}$ 2 次方程式 $ax^2+2b'x+c=0\left(\dfrac{D}{4}=0\right)$ のただ 1 つの実数解(重解)は

$$x=\frac{-b'}{a}$$

$\boxed{3}$ 2 次方程式 $ax^2+2b'x+c=0\left(\dfrac{D}{4}<0\right)$ の実数解はない.

ただし $x=\dfrac{-b'\pm\sqrt{-\dfrac{D}{4}}\,i}{a}$ の共役な虚数解をもつ

2 次方程式の実数解の差

$a,\ b,\ c$ は実数で $a>0$ とする.

$\boxed{1}$ x の 2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の実数解を $x=\alpha,\beta\ (\alpha \leqq \beta)$ とすると

$$\beta-\alpha=\frac{\sqrt{D}}{a}\quad \text{ただし}\ D=b^2-4ac\ (\geqq 0)$$

$\boxed{2}$ x の 2 次方程式 $ax^2+2b'x+c=0$ の実数解を $x=\alpha,\beta\ (\alpha \leqq \beta)$ とすると

$$\beta-\alpha=\frac{2\sqrt{\frac{D}{4}}}{a}\quad \text{ただし}\ \frac{D}{4}=b'^2-ac\ (\geqq 0)$$

考 $\boxed{1}$ x の 2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解は

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$$

$a>0$ より $\dfrac{-b-\sqrt{D}}{2a} \leqq \dfrac{-b+\sqrt{D}}{2a}$ であるから

$$\alpha=\frac{-b-\sqrt{D}}{2a},\ \beta=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}$$

よって

$$\beta-\alpha=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}-\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}=\frac{2\sqrt{D}}{2a}=\frac{\sqrt{D}}{a}$$

$\boxed{2}$ $\boxed{1}$ より $\beta-\alpha=\dfrac{\sqrt{D}}{a}=\dfrac{\sqrt{4\cdot\frac{D}{4}}}{a}=\dfrac{2\sqrt{\frac{D}{4}}}{a}$

補 $\boxed{1}$ $a>0$ の条件を $a \neq 0$ とすると $|\beta-\alpha|=\dfrac{\sqrt{D}}{|a|}\ (D\geqq 0)$

$\boxed{2}$ $a>0$ の条件を $a \neq 0$ とすると $|\beta-\alpha|=\dfrac{2\sqrt{\frac{D}{4}}}{|a|}\ \left(\dfrac{D}{4}\geqq 0\right)$

2 次方程式の解との因数分解

$a,\ b,\ c$ は実数 とする.

x の 2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ が 2 つの解 $x=\alpha,\beta$ をもつならば

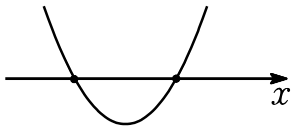
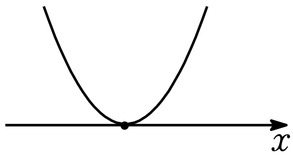
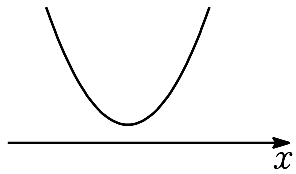
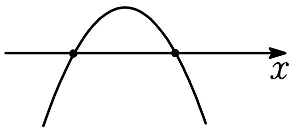
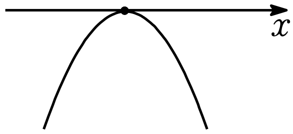
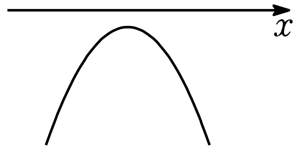
$$ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta)$$

2 次関数のグラフと x 軸の位置関係

座標平面で

$$\begin{cases} y = ax^2 + bx + c \ (a \neq 0) \\ y = 0 \ (x\text{ 軸}) \end{cases}$$

の位置関係は $D = b^2 - 4ac$ として 次の表のようになる．

D の符号	$D > 0$	$D = 0$	$D < 0$
位置関係	異なる 2 点で交わる	1 点で接する	共有点をもたない
$a > 0$（下に凸）			
$a < 0$（上に凸）			

考 共有点の x 座標は x についての 2 次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の実数解であるから，実数解の個数から位置関係は決まる．

補 下に凸，上に凸か，放物線 $y = ax^2 + bx + c \ (a \neq 0)$ の頂点の y 座標の符号からも位置関係はわかる．

因数分解と 2 次不等式

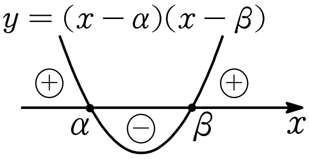
$\alpha < \beta$ とする．

$\boxed{1}$ $(x-\alpha)(x-\beta) = 0 \iff x = \alpha\ ,\ \beta$

$\boxed{2}$ $(x-\alpha)(x-\beta) < 0 \iff \alpha < x < \beta$

$\boxed{3}$ $(x-\alpha)(x-\beta) > 0 \iff x < \alpha,\ \beta < x$

$y = (x-\alpha)(x-\beta)$



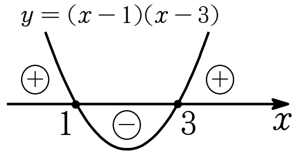
注 グラフにある ⊕ は y の符号が正，⊖ は y の符号が負であることを表す．

例 $\boxed{1}$ $(x-1)(x-3) = 0 \iff x = 1,\ 3$

$\boxed{2}$ $(x-1)(x-3) < 0 \iff 1 < x < 3$

$\boxed{3}$ $(x-1)(x-3) > 0 \iff x < 1,\ 3 < x$

$y = (x-1)(x-3)$



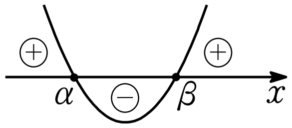
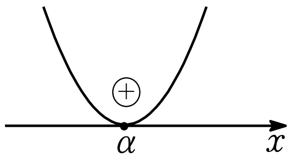
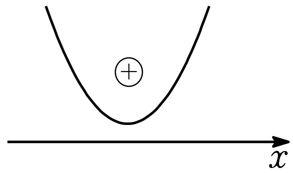
2 次方程式の実数解と 2 次不等式の解

座標平面で

$$\begin{cases} y = ax^2 + bx + c\ (a \neq 0) \\ y = 0\ (x \text{ 軸}) \end{cases}$$

の位置関係を考えて x の 2 次不等式を次のように解くことができる.

ただし $D = b^2 - 4ac$ とし $a > 0$, $\alpha < \beta$ とする.

D の符号	$D > 0$	$D = 0$	$D < 0$
$y = ax^2+bx+c$ のグラフ			
$ax^2+bx+c=0$ の実数解	$x = \alpha,\ \beta$	$x = \alpha$	実数解なし
$ax^2+bx+c>0$ の解	$x < \alpha,\ \beta < x$	$x < \alpha,\ \alpha < x$	すべての実数 x
$ax^2+bx+c \geqq 0$ の解	$x \leqq \alpha,\ \beta \leqq x$	すべての実数 x	すべての実数 x
$ax^2+bx+c<0$ の解	$\alpha < x < \beta$	解なし	解なし
$ax^2+bx+c \leqq 0$ の解	$\alpha \leqq x \leqq \beta$	$x = \alpha$	解なし

注 グラフにある ⊕ は y の符号が正, ⊖ は y の符号が負であることを表す.

補 グラフをイメージすると不等式の解は求まる.