数学Ⅲ　極限

~高校数学のまとめ~

教科書をもとに定義や定理を独自にパネル形式でまとめています．
何度も書き直し，加筆修正を繰り返しており，完成したものではありません．
人によっては不要な部分もあるでしょう．そういうときは読み飛ばしてください．

無限大

変数 x の値をどんな正の数よりも大きくすることを

x を限りなく大きくする といい $x \to \infty$ と表す.

この記号 ∞ を 無限大（むげんだい） という.

注意として ∞ は値や数を表すものではない.

数列の極限

無限数列 $\{a_n\}$ において

n を限りなく大きくするとき a_n が一定の値 α に限りなく近づく ならば

数列 $\{a_n\}$ は α に 収束（しゅうそく） するといい, α を 数列 $\{a_n\}$ の 極限値（きょくげんち） という.

このとき, 次のように書き表わす.

$n \to \infty$ のとき $a_n \to \alpha$ または $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$

㊓ lim は極限を意味する limit に由来する記号で「リミット」と読む.

㊓ 数列 $\{a_n\}$ の極限は α であるともいう.

㊎ $a_n = \dfrac{1}{n}$ について $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

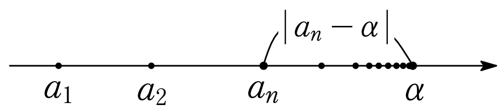
数列 $\{a_n\}$ は 0 に収束する.

数列の極限の意味

無限数列 $\{a_n\}$ が α に収束するとは

数直線上で点 a_n と点 α の距離 $|a_n - \alpha|$ が

いくらでも小さくなるということである.



すなわち $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha \iff \lim_{n\to\infty} |a_n - \alpha| = 0$

㊟ 大学の数学では, 無限数列 $\{a_n\}$ が α に収束することを次のように厳密に定義する.

任意の正の数 ε に対して, ある自然数 m が定まり,
$n > m$ であるどんな n に対しても $|a_n - \alpha| < \varepsilon$ となる.

㊓ ε（イプシロン） はギリシャ文字でアルファベットの e に相当する.

発散

無限数列 $\{a_n\}$ が 収束しないとき 数列 $\{a_n\}$ は 発散(はっさん)する という.

正の無限大に発散

無限数列 $\{a_n\}$ において

n を限りなく大きくするとき a_n が限りなく大きくなる ならば

数列 $\{a_n\}$ は正の無限大に発散するという.

このとき，次のように書き表わす.

$n \to \infty$ のとき $a_n \to \infty$ または $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$

㊋ 数列 $\{a_n\}$ の極限は正の無限大ともいう.

㊀ $a_n = n^2$ について $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} n^2 = \infty$

負の無限大に発散

無限数列 $\{a_n\}$ において

n を限りなく大きくするとき a_n が負で，その絶対値が限りなく大きくなる

ならば 数列 $\{a_n\}$ は負の無限大に発散するという.

このとき，次のように書き表わす.

$n \to \infty$ のとき $a_n \to -\infty$ または $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$

㊋ 数列 $\{a_n\}$ の極限は負の無限大ともいう.

㊀ $a_n = 3-2n$ について $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(3-2n) = -\infty$

㊟ $-\infty$ と区別する意味で ∞ を $+\infty$ と書くことがある.

振動

発散する無限数列 $\{a_n\}$ が正の無限大にも負の無限大にも発散しないならば

数列 $\{a_n\}$ は **振動する**（しんどう）という．

例 $a_n = (-1)^n$ について $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(-1)^n = \begin{cases} -1 & (n\text{ が奇数}) \\ 1 & (n\text{ が偶数}) \end{cases}$

数列 $\{a_n\}$ は一定の値に近づいてないので収束しないで，発散する．

正の無限大にも負の無限大にも発散しないので，数列 $\{a_n\}$ は振動するという．

収束の極限の分類

無限数列の極限を分類すると次のようになる．

数列の極限
- 収束　$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$　極限値は α である
- 発散
  - $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$　正の無限大に発散する
  - $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$　負の無限大に発散する
  - 振　動　極限は定まらない

基本的な極限

α を定数とする．無限数列 $\{n^\alpha\}$ の極限について

$$\lim_{n\to\infty} n^\alpha = \begin{cases} 0 & (\alpha < 0) \\ 1 & (\alpha = 0) \\ \infty & (\alpha > 0) \end{cases}$$

とくに 数列 $\{n^\alpha\}$ が収束する $\iff \alpha \leqq 0$

例 $\lim_{n\to\infty} n^{-2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0$，$\lim_{n\to\infty} n^0 = \lim_{n\to\infty} 1 = 1$，$\lim_{n\to\infty} n^2 = \infty$

不定形

収束，発散が定まらない極限を **不定形**（ふていけい）という．

例 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$，$\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$ とすると $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n}$ は収束，発散が定まらないので不定形

$\dfrac{0}{0}$ の極限は次のように収束する場合と発散する場合があるということである．

あ $a_n = \dfrac{1}{n^2}$，$b_n = \dfrac{1}{n}$ の場合

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0,\ \lim_{n\to\infty} b_n = 0 \text{ であり } \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

い $a_n = \dfrac{1}{n}$，$b_n = \dfrac{1}{n^2}$ の場合

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0,\ \lim_{n\to\infty} b_n = 0 \text{ であり } \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} n = \infty$$

数列の極限の性質

2つの無限数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ が収束して $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \alpha$，$\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \beta$ とする．

このとき，次が成り立つ．

$\boxed{1}$ k を定数として $\lim\limits_{n\to\infty} k\,a_n = k\,\alpha$

$\boxed{2}$ $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \alpha + \beta$

$\boxed{3}$ $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n - b_n) = \alpha - \beta$

$\boxed{1}$，$\boxed{2}$，$\boxed{3}$ をまとめて 実数 s，t に対して $\lim\limits_{n\to\infty}(s\,a_n + t\,b_n) = s\,\alpha + t\,\beta$

$\boxed{4}$ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n\,b_n = \alpha\,\beta$

$\boxed{5}$ $\beta \fallingdotseq 0$ ならば $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{\alpha}{\beta}$

$$\beta = 0 \text{ ならば } \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \begin{cases} \text{発散} & (\alpha \fallingdotseq 0) \\ \text{不定形} & (\alpha = 0) \end{cases}$$

補 $(\alpha,\beta) \fallingdotseq (0,0)$，${a_n}^{b_n}$，$\alpha^\beta$ が定義できるならば $\lim\limits_{n\to\infty} {a_n}^{b_n} = \alpha^\beta$ もあるが教科書にはない．

正の発散と収束がある数列の極限の性質

無限数列 $\{a_n\}$ が定数 α に収束，無限数列 $\{b_n\}$ が正の無限大に発散

すなわち $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$ とする.

このとき，次が成り立つ.

$\boxed{1}$ k を定数として $\displaystyle\lim_{n\to\infty} k\,b_n = \begin{cases} \infty & (k > 0) \\ 0 & (k = 0) \\ -\infty & (k < 0) \end{cases}$

$\boxed{2}$ $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \infty$

$\boxed{3}$ $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = -\infty$

$\boxed{4}$ $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n\,b_n = \begin{cases} \infty & (\alpha > 0) \\ \text{不定形} & (\alpha = 0) \\ -\infty & (\alpha < 0) \end{cases}$

$\boxed{5}$ $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$

$\boxed{6}$ $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n}$ は発散

正の発散がある数列の極限の性質

2 つの無限数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ がともに正の無限大に発散

すなわち $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$ とする.

このとき，次が成り立つ.

$\boxed{1}$ k を定数として $\displaystyle\lim_{n\to\infty} k\,a_n = \begin{cases} \infty & (k > 0) \\ 0 & (k = 0) \\ -\infty & (k < 0) \end{cases}$

$\boxed{2}$ $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \infty$

$\boxed{3}$ $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n)$ は不定形

$\boxed{4}$ $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n\,b_n = \infty$

$\boxed{5}$ $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$ は不定形

数列の極限と大小関係

2 つの数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ について

十分大きな n に対し $a_n \leqq b_n$ が成り立つとき

$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ かつ $\displaystyle\lim_{n\to\infty} b_n = \beta$ ならば $\alpha \leqq \beta$

㊟「$a_n \leqq b_n$」を「$a_n < b_n$」としても $\alpha < \beta$ になるとは限らない．

㊝ $a_n = 1 - \dfrac{1}{n}$，$b_n = 1 + \dfrac{1}{n}$ について つねに $a_n < b_n$ が成り立つが $\alpha = \beta = 1$

追い出しの原理

2 つの数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ について

十分大きな n に対し $a_n \leqq b_n$ が成り立つとき

$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ ならば $\displaystyle\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$

はさみうちの原理

3 つの数列 $\{a_n\}$，$\{x_n\}$，$\{y_n\}$ について

十分大きな n に対し $x_n \leqq a_n \leqq y_n$ が成り立つとき

$\displaystyle\lim_{n\to\infty} x_n = \alpha$ かつ $\displaystyle\lim_{n\to\infty} y_n = \alpha$ ならば $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$

(補)「ハサミウチの原理」と表記する人もいる．

(補)「原理」と呼ぶのは高校の範囲では証明ができない定理だからで，とりあえず認めて先に進むという配慮である．

無限等比数列の極限

r を定数とする．公比 r の無限等比数列 $\{r^n\}$ の極限について

$$\lim_{n\to\infty} r^n = \begin{cases} r>1 & \text{のとき} \quad \infty \\ r=1 & \text{のとき} \quad 1 \\ |r|<1 & \text{のとき} \quad 0 \\ r=-1 & \text{のとき} \quad \pm 1 \ (\text{振動}) \\ r<-1 & \text{のとき} \quad \pm\infty \ (\text{振動}) \end{cases}$$

とくに 数列 $\{r^n\}$ が収束する $\iff -1 < r \leqq 1$

例 $r = 2,\ 1,\ \dfrac{1}{2},\ -1,\ -2$ について

$$\lim_{n\to\infty} 2^n = \infty, \qquad \lim_{n\to\infty} 1^n = 1, \qquad \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$$

$$\lim_{n\to\infty}(-1)^n = \begin{cases} -1 & (n\text{ が奇数}) \\ 1 & (n\text{ が偶数}) \end{cases}, \qquad \lim_{n\to\infty}(-2)^n = \begin{cases} -\infty & (n\text{ が奇数}) \\ \infty & (n\text{ が偶数}) \end{cases}$$

考 $r > 1$ のとき

$r = 1 + h$ かつ $h > 0$ となる h が存在し $r^n = (1+h)^n$

十分大きな n に対して

$$\begin{aligned}(1+h)^n &= {}_n\mathrm{C}_0 + {}_n\mathrm{C}_1 h + {}_n\mathrm{C}_2 h^2 + \cdots + {}_n\mathrm{C}_n h^n \ (\because \text{二項定理}) \\ &> {}_n\mathrm{C}_1 h \ (\because {}_n\mathrm{C}_0 + {}_n\mathrm{C}_2 h^2 + \cdots + {}_n\mathrm{C}_n h^n > 0) \\ &= nh\end{aligned}$$

$\therefore r^n > hn$

ここで $\displaystyle\lim_{n\to\infty} hn = \infty$

追い出しの原理を用いて $\displaystyle\lim_{n\to\infty} r^n = \infty$

あ $r = 0$ のとき

$r^n = 0$ であるから $\displaystyle\lim_{n\to\infty} r^n = 0$

い $0 < |r| < 1$ のとき

$r = \pm\dfrac{1}{s}$ かつ $s > 1$ となる s が存在し $\displaystyle\lim_{n\to\infty} s^n = \infty$

ここで $\displaystyle\lim_{n\to\infty} |r^n| = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{s^n} = 0$

ゆえに $\displaystyle\lim_{n\to\infty} r^n = 0$

あ，い より $|r| < 1$ のとき $\displaystyle\lim_{n\to\infty} r^n = 0$

等差数列と等比数列の積の極限

r を定数とする．無限数列 $\{nr^n\}$ の極限について

$|r| < 1$ ならば $\displaystyle\lim_{n\to\infty} nr^n = 0$

例 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$

考 あ $r = 0$ のとき

$nr^n = 0$ なので $\displaystyle\lim_{n\to\infty} nr^n = 0$

い $0 < |r| < 1$ のとき

$r = \pm\dfrac{1}{s}$ かつ $s > 1$ となる s が存在し $\displaystyle\lim_{n\to\infty} s^n = \infty$

$s = 1 + h$ かつ $h > 0$ となる h が存在し $s^n = (1+h)^n$

十分大きな n に対して

$$\begin{aligned}(1+h)^n &= {}_n\mathrm{C}_0 + {}_n\mathrm{C}_1 h + {}_n\mathrm{C}_2 h^2 + {}_n\mathrm{C}_3 h^3 + \cdots + {}_n\mathrm{C}_n h^n \ (\because\ \text{二項定理}) \\ &> {}_n\mathrm{C}_2 h^2 \ (\because\ {}_n\mathrm{C}_0 + {}_n\mathrm{C}_1 h + {}_n\mathrm{C}_3 h^3 + \cdots + {}_n\mathrm{C}_n h^n > 0) \\ &= \frac{n(n-1)}{2}h^2\end{aligned}$$

$\therefore\ s^n > \dfrac{h^2}{2}n(n-1)$

これより $0 < |nr^n| = \dfrac{n}{s^n} < \dfrac{n}{\frac{h^2}{2}n(n-1)} < \dfrac{2}{h^2(n-1)}$

ここで $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{2}{h^2(n-1)} = 0$

はさみうちの原理を用いて $\displaystyle\lim_{n\to\infty} |nr^n| = 0$

ゆえに $\displaystyle\lim_{n\to\infty} nr^n = 0$

あ，い より $|r| < 1$ のとき $\displaystyle\lim_{n\to\infty} nr^n = 0$

部分列

無限数列 $\{a_n\}$ について

自然数の列 $k(1),\ k(2),\ k(3),\ \cdots$　ただし $k(1) < k(2) < k(3) < \cdots$

を用いた 数列 $\left\{a_{k(m)}\right\}$ $(m = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

つまり 無限数列 $\{a_n\}$ の項のうちから，順番を変えずに並べた無限数列を

数列 $\{a_n\}$ の**部分列** または **部分数列** という.

数列 $\{a_n\}$ 自身も部分列であるとする.

㊎ 無限数列 $\{a_n\}$ の項 $a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5,\ a_6,\ \cdots$ のうちから n が偶数の項だけ並べて
$a_2,\ a_4,\ a_6,\ \cdots$ となる項は数列 $\{a_n\}$ の部分列である.
つまり $b_n = a_{2m}$ $(m = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ として 数列 $\{b_n\}$ は数列 $\{a_n\}$ の部分列である.

㊟ 順番を変えて $a_2,\ a_6,\ a_4,\ \cdots$ としたようなものは部分列ではない.

極限の収束と部分列の収束

無限数列 $\{a_n\}$ とその部分列 $\{b_n\}$ について

$\boxed{1}$ 無限数列 $\{a_n\}$ が α に収束するならば その部分列 $\{b_n\}$ も α に収束する.

すなわち $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \alpha$ ならば $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \alpha$

$\boxed{2}$ 無限数列 $\{a_n\}$ が正の無限大に発散するならば その部分列 $\{b_n\}$ も
正の無限大に発散する.

すなわち $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ ならば $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$

㊎ $\boxed{1}$ $a_n = \dfrac{1}{n}$ について $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$

数列 $\{a_n\}$ の部分列 $\{b_n\}$ を $b_n = a_{2m} = \dfrac{1}{2m}$ とする.

$n \to \infty$ ならば $m \to \infty$ なので $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{m\to\infty} a_{2m} = \lim\limits_{m\to\infty} \dfrac{1}{2m} = 0$

$\boxed{2}$ $a_n = n^2$ について $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} n^2 = \infty$

数列 $\{a_n\}$ の部分列 $\{b_n\}$ を $b_n = a_{2m} = (2m)^2 = 4m^2$ とする.

$n \to \infty$ ならば $m \to \infty$ なので $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{m\to\infty} a_{2m} = \lim\limits_{m\to\infty} 4m^2 = \infty$

部分列の収束と極限の収束

無限数列 $\{a_n\}$ とその部分列 $\{b_n\}$ について

部分列 $\{b_n\}$ が α に収束するならば 数列 $\{a_n\}$ が α に収束するとは限らない.

㊎ $a_n=(-1)^n$ について $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}(-1)^n$ は収束せず振動する.

数列 $\{a_n\}$ の部分列 $\{b_n\}$ を $b_n=a_{2m}=(-1)^{2m}=1$ とする.

$n\to\infty$ ならば $m\to\infty$ なので $\displaystyle\lim_{n\to\infty}b_n=\lim_{m\to\infty}a_{2m}=\lim_{m\to\infty}1=1$

ところが $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n\neq 1$

部分列からの極限

無限数列 $\{a_n\}$ について

p を 2 以上の整数とし，n を p で割ったときの余りが $0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ p-1$

となる項をそれぞれ並べた部分列 $\{a_{pm}\}$，$\{a_{pm+1}\}$，$\{a_{pm+2}\}$，$\cdots$，$\{a_{pm+p-1}\}$

がすべて α に収束するならば 数列 $\{a_n\}$ も α に収束する.

つまり

$$\begin{cases}\displaystyle\lim_{m\to\infty}a_{pm}=\alpha\\ \displaystyle\lim_{m\to\infty}a_{pm+1}=\alpha\\ \displaystyle\lim_{m\to\infty}a_{pm+2}=\alpha\\ \qquad\vdots\\ \displaystyle\lim_{m\to\infty}a_{pm+p-1}=\alpha\end{cases}\quad \text{ならば}\quad \lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$$

㊎ $$\begin{cases}\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_{2m}=\alpha\\ \displaystyle\lim_{n\to\infty}a_{2m+1}=\alpha\end{cases}\quad \text{ならば}\quad \lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$$

$$\begin{cases}\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_{3m}=\beta\\ \displaystyle\lim_{n\to\infty}a_{3m+1}=\beta\\ \displaystyle\lim_{n\to\infty}a_{3m+2}=\beta\end{cases}\quad \text{ならば}\quad \lim_{n\to\infty}a_n=\beta$$

㊚ n を p で割ったときの余りが r の部分列は $\{a_{pm+r}\}$ である.

このとき $n=(p\text{ の倍数})+r$ と表せるが

$r=p-s$ ならば $n=(p\text{ の倍数})-s$ でもあるから

n を p で割ったときの余りが r の部分列は $\{a_{pm-s}\}$ と表すこともできる.

例えば，n を 3 で割ったときの余りが 2 の部分列は $\{a_{3m+2}\}$ でも $\{a_{3m-1}\}$ でもよい.

$m\to\infty$ とするので $m=1,\ 2$ などの小さい m は気にしなくてよい.

漸化式からの極限

数列 $\{a_n\}$ の漸化式 $a_{n+1} = f(a_n)$ のもとで $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ を求める方法に次がある.

1. 漸化式を解いて数列 $\{a_n\}$ の一般項を求める.
2. 不等式を利用して求める.

等比数列の漸化式の不等式変形

数列 $\{A_n\}$ の漸化式

$A_{n+1} \leqq r\,A_n$（r は n に無関係な定数）ただし $n = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \cdots$

について，これをくり返して

$$
\begin{aligned}
A_n &\leqq rA_{n-1} \quad (n \geqq 1)\\
&\leqq r^2A_{n-2} \quad (n \geqq 2)\\
&\leqq r^3A_{n-3} \quad (n \geqq 3)\\
&\quad\vdots\\
&\leqq r^{n-3}A_3 \quad (n \geqq 3)\\
&\leqq r^{n-2}A_2 \quad (n \geqq 2)\\
&\leqq r^{n-1}A_1 \quad (n \geqq 1)\\
&\leqq r^{n}A_0 \quad (n \geqq 0)
\end{aligned}
$$

たしたら n

つまり $A_n \leqq r^{\bigcirc} A_{\square}$ $(\bigcirc + \square = n)$

漸化式を変形して求める極限

数列 $\{a_n\}$ の漸化式 $a_{n+1}=f(a_n)$ のもとで $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\alpha$

つまり無限数列 $\{a_n\}$ の極限値 α を求める方法に次の手順がある.

$\boxed{1}$ $f(\alpha)=\alpha$ を満たすことが必要であることから α を推測する.

$\boxed{2}$ 十分大きな n に対して

$$|a_{n+1}-\alpha| \leqq r|a_n-\alpha| \quad \text{かつ} \quad 0<r<1$$

となる r を 1 つ求める.

$\boxed{3}$ $\boxed{2}$ を繰り返し用いて $|a_n-\alpha| \leqq r^{n-1}|a_1-\alpha|$

$\boxed{4}$ $|a_n-\alpha| \geqq 0$ および $\lim\limits_{n\to\infty} r^{n-1}|a_1-\alpha|=0$ であるから $\boxed{3}$ より

$\lim\limits_{n\to\infty} |a_n-\alpha|=0$ すなわち $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\alpha$

補 絶対値記号を外して考えてもよい. 入試では誘導問題になることが多い.

補 $\boxed{3}$ の変形は $\boxed{\text{等比数列の漸化式の不等式変形}}$ を利用する.

無限級数

無限数列 $a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots,\ a_n,\ \cdots$ の各項を順に $+$ の記号で結んで得られる式

$$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n+\cdots$$

を **無限級数**（むげんきゅうすう） といい a_1 を 無限級数の初項，a_n を 無限級数の第 n 項 という．

この無限級数を記号 $\sum$ を用いて $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ と書き表すことがある．

すなわち $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n+\cdots$

㊓ 「級数」は「足し算」を意味する．これより「無限級数」は「無限の足し算」を意味する．

無限級数の部分和

無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n+\cdots$

において 初項から第 n 項の和

$$S_n=\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$$

を この無限級数の 第 n 項までの **部分和**（ぶぶんわ） という．

無限級数の和

無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n+\cdots$

において 第 n 項の部分和を S_n として 数列 $\{S_n\}$ が S に収束する

すなわち $\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n = S$ であるとき

無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は S に**収束する**といい S を 無限級数の**和** という．

このとき $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$ または $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n+\cdots=S$ と書く．

数列 $\{S_n\}$ が発散するとき 無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は **発散する** という．

㊛ 「級数の和」の表現は「車に乗車」のように違和感を感じる人もいる．

無限級数の性質

無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$，$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ が収束して その和をそれぞれ S，T とする．

つまり $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$，$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = T$ とするとき，次が成り立つ．

$\boxed{1}$ k を定数として $\sum_{n=1}^{\infty} ka_n = kS$

$\boxed{2}$ $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n) = S + T$

$\boxed{3}$ $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - b_n) = S - T$

$\boxed{1}$，$\boxed{2}$，$\boxed{3}$ をまとめて 実数 p，q に対して

$$\sum_{n=1}^{\infty}(pa_n + qb_n) = pS + qT$$

㊟ 収束しない無限級数は和の順番を変えるとおかしなことが起こる場合もある．

無限等比級数の和

初項が a，公比が r の無限等比数列

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} + \cdots$$

について

$\boxed{1}$ $a=0$ のとき 収束し，その和は 0

$\boxed{2}$ $a \neq 0$ のとき

$|r| < 1$ ならば収束し，その和は $\dfrac{a}{1-r}$ つまり $\dfrac{(\text{初項})}{1-(\text{公比})}$

$|r| \geqq 1$ ならば発散する

とくに $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$ が収束する $\iff$ $a=0$ または $|r|<1$

㊂ 第 n 項までの部分を S_n とおくと

$$S_n = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1}$$

$\boxed{1}$ $a=0$ のとき

$S_n = 0$ であるから $\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n = 0$

すなわち $a=0$ のとき収束し，和は 0

$\boxed{2}$ $a \neq 0$ のとき

㋐ $r=1$ ならば $S_n = a + a + a + \cdots + a = an$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} an$ は発散する.

㋑ $r \neq 1$ ならば $S_n = \dfrac{a(1-r^n)}{1-r}$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a(1-r^n)}{1-r} = \begin{cases} \dfrac{a}{1-r} & (|r|<1) \\ \text{発散する} & (r \leqq -1,\ 1<r) \end{cases}$$

㋐，㋑ より $|r|<1$ のとき収束し，和は $\dfrac{a}{1-r}$

無限級数の収束・発散

無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ について，次の命題が成り立つ．

$\boxed{1}$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束するならば　$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

$\boxed{2}$ $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ ならば　$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は発散する

㊂ $\boxed{1}$ 無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束するならば

第 n 項までの部分和を $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$，和を S として　$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S$

ここで　$n \geqq 2$ のとき $a_n = S_n - S_{n-1}$

よって　$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(S_n - S_{n-1}) = S - S = 0$

$\boxed{2}$ $\boxed{1}$ が真なのでその対偶命題も真となる．

㊖ $\boxed{2}$ が成り立つので

無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ ならば部分和を求めなくても **発散** することがわかる．

㊋ $a_n = \dfrac{n}{n+1}$ について　$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \dfrac{n}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{1+\frac{1}{n}} = 1 \neq 0$

これより　$\sum_{k=1}^{n} \dfrac{n}{n+1}$ は発散する．

㊟ 逆は成り立たない．

㊇

$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ ならば　$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束するは偽

反例は　$a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$，$a_n = \dfrac{1}{n}$ など

関数の極限

関数 $f(x)$ において

x が a と異なる値をとりながら限りなく a に近づくとき

$f(x)$ が一定の値 α に限りなく近づく ならば

関数 $f(x)$ は α に**収束**するといい

α を x が a に限りなく近づくときの関数 $f(x)$ の **極限値** という.

このとき，次のように書き表わす.

$x \to a$ のとき $f(x) \to \alpha$ または $\displaystyle\lim_{x\to a} f(x) = \alpha$

㊎ 極限値を極限ということもある.

㋫ $f(x) = x^2$ について $\displaystyle\lim_{x\to 3} f(x) = \lim_{x\to 3} x^2 = 9$

正の無限大に発散する関数

関数 $f(x)$ において

x が a と異なる値をとりながら限りなく a に近づくとき

$f(x)$ の値が限りなく大きくなるならば

$f(x)$ は**正の無限大に発散する**という.

また 極限は ∞ であるともいう.

このとき，次のように書き表わす.

$x \to a$ のとき $f(x) \to \infty$ または $\displaystyle\lim_{x\to a} f(x) = \infty$

㋫ $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ について $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = \infty$

負の無限大に発散する関数

関数 $f(x)$ において

x が a と異なる値をとりながら限りなく a に近づくとき

$f(x)$ が負で，その絶対値が限りなく大きくなるならば

$f(x)$ は**負の無限大に発散する**という.

また 極限は $-\infty$ であるともいう.

このとき，次のように書き表わす.

$x \to a$ のとき $f(x) \to -\infty$ または $\displaystyle\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$

㊞ $f(x) = -\dfrac{1}{x^2}$ について $\displaystyle\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0}\left(-\dfrac{1}{x^2}\right) = -\infty$

極限はない

関数 $f(x)$ において

$$\lim_{x \to a} f(x) = \alpha, \quad \lim_{x \to a} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \to a} f(x) = -\infty$$

のいずれでもない場合，$x \to a$ のときの $f(x)$ の極限はない という.

片側からの極限

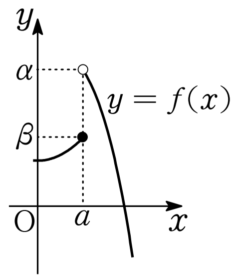
関数 $f(x)$ において

1 x が a より大きい値 $(a<x)$ をとりながら限りなく a に近づくとき

$f(x)$ が限りなく α に近づくならば

α を x が a に近づくときの $f(x)$ の右側極限（みぎがわきょくげん）といい

$\displaystyle\lim_{x\to a+0} f(x)=\alpha$ と表す.



とくに $a=0$ のときは $\displaystyle\lim_{a\to +0} f(x)=\alpha$ と表す.

また 極限が正の無限大，負の無限大となる場合には

$\displaystyle\lim_{x\to a+0} f(x)=\infty$， $\displaystyle\lim_{x\to a+0} f(x)=-\infty$ のように表わす.

2 x が a より小さい値 $(x<a)$ をとりながら限りなく a に近づくとき

$f(x)$ が限りなく β に近づくならば

β を x が a に近づくときの $f(x)$ の左側極限（ひだりがわきょくげん）といい

$\displaystyle\lim_{x\to a-0} f(x)=\beta$ と表す.

とくに $a=0$ のときは $\displaystyle\lim_{a\to -0} f(x)=\beta$ と表す.

また 極限が正の無限大，負の無限大となる場合には

$\displaystyle\lim_{x\to a-0} f(x)=\infty$， $\displaystyle\lim_{x\to a-0} f(x)=-\infty$ のように表わす.

(補) $a=0$ のときは「$x\to 0+0$」と書かず「$x\to +0$」,「$x\to 0-0$」と書かず「$x\to -0$」

(補) $\alpha \fallingdotseq \beta$ ならば $x\to a$ のときの $f(x)$ の極限はない

片側からの極限と極限値

$\displaystyle\lim_{x\to a} f(x)=\alpha$ であるとは

$\displaystyle\lim_{x\to a+0} f(x)$ と $\displaystyle\lim_{x\to a-0} f(x)$ が存在して，ともに α になること.

つまり $x\to a$ のときの右側極限と左側極限がともに α である.

すなわち $\displaystyle\lim_{x\to a+0} f(x)=\lim_{x\to a-0} f(x)=\alpha \iff \lim_{x\to a} f(x)=\alpha$

(補) $\displaystyle\lim_{a\to +0} f(x)$ かつ $\displaystyle\lim_{a\to -0} f(x)$ が存在しても $\displaystyle\lim_{a\to +0} f(x) \fallingdotseq \lim_{a\to -0} f(x)$ ならば

$\displaystyle\lim_{x\to a} f(x)$ は存在しない.

無限大と関数の極限

関数 $f(x)$ において

x を限りなく大きくするとき $f(x)$ が一定の値 α に限りなく近づく ならば

関数 $f(x)$ は α に**収束する**といい，α を 関数 $f(x)$ の **極限値** という.

このとき，次のように書き表わす.

$$x \to \infty \text{ のとき } f(x) \to \alpha \quad \text{または} \quad \lim_{x\to\infty} f(x) = \alpha$$

㊧ $x = n$ として $f(n) = a_n$ とすると数列 $\{a_n\}$ の極限になる.

㊇ $f(x) = x^2$ について $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} x^2 = \infty$

負の無限大と関数の極限

関数 $f(x)$ において

x を限りなく小さくするとき $f(x)$ が一定の値 α に限りなく近づく ならば

関数 $f(x)$ は α に**収束する**といい，α を 関数 $f(x)$ の **極限値** という.

このとき，次のように書き表わす.

$$x \to -\infty \text{ のとき } f(x) \to \alpha \quad \text{または} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = \alpha$$

㊇ $f(x) = 2 - x$ について $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}(2 - x) = -\infty$

㊟ $-\infty$ と区別する意味で ∞ を $+\infty$ と書くことがある.

関数の極限の性質

関数 $f(x)$，$g(x)$ が収束して $\lim_{x \to a} f(x) = \alpha$，$\lim_{x \to a} g(x) = \beta$ とする．

このとき，次が成り立つ．

$\boxed{1}$ k を定数として $\lim_{x \to a} k\,f(x) = k\,\alpha$

$\boxed{2}$ $\lim_{x \to a} \left\{ f(x) + g(x) \right\} = \alpha + \beta$

$\boxed{3}$ $\lim_{x \to a} \left\{ f(x) - g(x) \right\} = \alpha - \beta$

$\boxed{1}$，$\boxed{2}$，$\boxed{3}$ をまとめて 実数 s，t に対して $\lim_{x \to a} \left\{ s\,f(x) + t\,g(x) \right\} = s\alpha + t\beta$

$\boxed{4}$ $\lim_{x \to a} f(x)\,g(x) = \alpha\,\beta$

$\boxed{5}$ $\beta \neq 0$ ならば $\lim_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\alpha}{\beta}$

$\beta = 0$ ならば $\lim_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \begin{cases} \text{発散} & (\alpha \neq 0) \\ \text{不定形} & (\alpha = 0) \end{cases}$

補 この性質は $x \to a$ を $x \to \infty$，$x \to -\infty$，$x \to a+0$，$x \to a-0$ としても成り立つ．

正の発散と収束がある関数の極限の性質

関数 $f(x)$ が定数 α に収束，$g(x)$ が正の無限大に発散

すなわち $\displaystyle\lim_{x\to a} f(x)=\alpha$，$\displaystyle\lim_{x\to a} g(x)=\infty$ とする．

このとき，次が成り立つ．

$\boxed{1}$ k を定数として $\displaystyle\lim_{x\to a} k\,g(x)=\begin{cases}\infty & (k>0)\\ 0 & (k=0)\\ -\infty & (k<0)\end{cases}$

$\boxed{2}$ $\displaystyle\lim_{x\to a}\{f(x)+g(x)\}=\infty$

$\boxed{3}$ $\displaystyle\lim_{x\to a}\{f(x)-g(x)\}=-\infty$

$\boxed{4}$ $\displaystyle\lim_{x\to a} f(x)\,g(x)=\begin{cases}\infty & (\alpha>0)\\ \text{不定形} & (\alpha=0)\\ -\infty & (\alpha<0)\end{cases}$

$\boxed{5}$ $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=0$

$\boxed{6}$ $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{g(x)}{f(x)}$ は発散

補 この性質は $x\to a$ を $x\to\infty$，$x\to-\infty$，$x\to a+0$，$x\to a-0$ としても成り立つ．

正の発散がある関数の極限の性質

関数 $f(x)$，$g(x)$ がともに正の無限大に発散

すなわち $\displaystyle\lim_{x\to a} f(x)=\infty$，$\displaystyle\lim_{x\to a} g(x)=\infty$ とする．

このとき，次が成り立つ．

$\boxed{1}$ k を定数として $\displaystyle\lim_{x\to a} k\,f(x)=\begin{cases}\infty & (k>0)\\ 0 & (k=0)\\ -\infty & (k<0)\end{cases}$

$\boxed{2}$ $\displaystyle\lim_{x\to a}\{f(x)+g(x)\}=\infty$

$\boxed{3}$ $\displaystyle\lim_{x\to a}\{f(x)-g(x)\}$ は不定形

$\boxed{4}$ $\displaystyle\lim_{x\to a} f(x)\,g(x)=\infty$

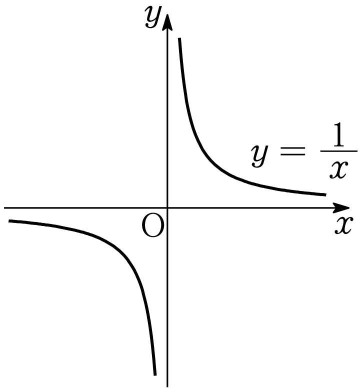
$\boxed{5}$ $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ は不定形

補 この性質は $x\to a$ を $x\to\infty$，$x\to-\infty$，$x\to a+0$，$x\to a-0$ としても成り立つ．

分数関数 $\dfrac{1}{x}$ の極限

分数関数 $\dfrac{1}{x}$ の極限は次のようになる.

1. $\displaystyle\lim_{x\to+0}\frac{1}{x}=\infty$
2. $\displaystyle\lim_{x\to-0}\frac{1}{x}=-\infty$
3. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$
4. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0$

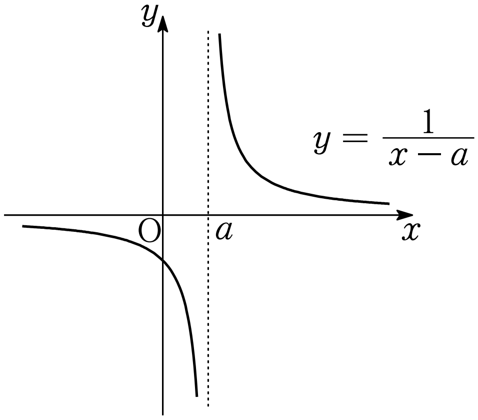


㊫ $y=\dfrac{1}{x}$ のグラフを考える.

分数関数 $\dfrac{1}{x-a}$ の極限

分数関数 $\dfrac{1}{x-a}$ の極限は次のようになる.

1. $\displaystyle\lim_{x\to a+0}\frac{1}{x-a}=\infty$
2. $\displaystyle\lim_{x\to a-0}\frac{1}{x-a}=-\infty$
3. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x-a}=0$
4. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x-a}=0$



㊫ $y=\dfrac{1}{x-a}$ のグラフを考える.

㊖ 1. $\displaystyle\lim_{x\to1+0}\frac{1}{x-1}=\infty$

2. $\displaystyle\lim_{x\to1-0}\frac{1}{x-1}=-\infty$

3. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x-1}=0$

4. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x-1}=0$

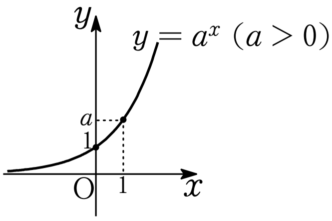
指数関数 a^x の極限

指数関数 a^x の極限は次のようになる.

$\boxed{1}$ $a>1$ のとき

$$\lim_{x\to+\infty} a^x = \infty$$

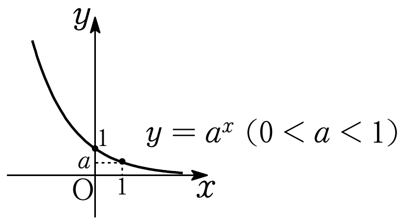
$$\lim_{x\to-\infty} a^x = 0$$



$\boxed{2}$ $0<a<1$ のとき

$$\lim_{x\to+\infty} a^x = 0$$

$$\lim_{x\to-\infty} a^x = \infty$$



㊟ $y=a^x$ のグラフを考える.

㊵ $\boxed{1}$ $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} 2^x = \infty$, $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} 2^x = 0$

$\boxed{2}$ $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x = 0$, $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x = \infty$

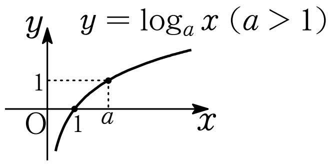
対数関数 $\log_a x$ の極限

対数関数 $\log_a x$ の極限は次のようになる.

$\boxed{1}$ $a>1$ のとき

$$\lim_{x\to+\infty} \log_a x = \infty$$

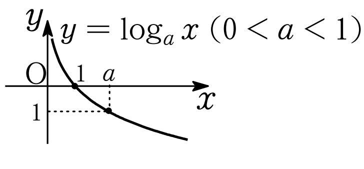
$$\lim_{x\to+0} \log_a x = -\infty$$



$\boxed{2}$ $0<a<1$ のとき

$$\lim_{x\to+\infty} \log_a x = -\infty$$

$$\lim_{x\to+0} \log_a x = \infty$$



㊟ $y=\log_a x$ のグラフを考える.

㊵ $\boxed{1}$ $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \log_2 x = \infty$, $\displaystyle\lim_{x\to+0} \log_2 x = -\infty$

$\boxed{2}$ $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \log_{\frac{1}{2}} x = -\infty$, $\displaystyle\lim_{x\to+0} \log_{\frac{1}{2}} x = \infty$

関数の極限と大小関係

関数 $f(x)$，$g(x)$ について

a の近くの x で常に $f(x) \leqq g(x)$ が成り立つとき

$\displaystyle\lim_{x\to a} f(x) = \alpha$ かつ $\displaystyle\lim_{x\to a} g(x) = \beta$ ならば $\alpha \leqq \beta$

㊟補 この性質は $x \to a$ を $x \to \infty$，$x \to -\infty$ としても同様のことが成り立つ.

㊟ 「$f(x) \leqq g(x)$」を「$f(x) < g(x)$」としても $\alpha < \beta$ になるとは限らない.

㊋例 $f(x) = x$，$g(x) = x + x^2$ について $x \fallingdotseq 0$ でつねに $f(x) < g(x)$ が成り立つが $\alpha = \beta = 1$

関数の追い出しの原理

関数 $f(x)$，$g(x)$ について

a の近くの x で常に $f(x) \leqq g(x)$ が成り立つとき

$\displaystyle\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ ならば $\displaystyle\lim_{x\to a} g(x) = \infty$

㊟補 この性質は $x \to a$ を $x \to \infty$，$x \to -\infty$ としても同様のことが成り立つ.

関数のはさみうちの原理

関数 $f(x)$，$g(x)$，$F(x)$ について

a の近くの x で常に $f(x) \leqq F(x) \leqq g(x)$ が成り立つとき

$\displaystyle\lim_{x\to a} f(x) = \alpha$ かつ $\displaystyle\lim_{x\to a} g(x) = \alpha$ ならば $\displaystyle\lim_{x\to a} F(x) = \alpha$

㊟補 この性質は $x \to a$ を $x \to \infty$，$x \to -\infty$ としても同様のことが成り立つ.

分数関数の極限が収束する必要条件

関数 $f(x)$，$g(x)$ について

$\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ が α に収束，つまり $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\alpha$ とする.

このとき

$$\lim_{x\to a}g(x)=0 \text{ ならば } \lim_{x\to a}f(x)=0$$

補 この性質は $x\to a$ を $x\to\infty$，$x\to-\infty$，$x\to a+0$，$x\to a-0$ としても成り立つ.

考 $\displaystyle\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}g(x)\cdot\frac{f(x)}{g(x)}=0\cdot\alpha=0$

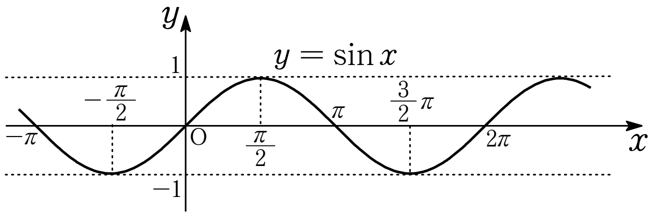
三角関数の極限

三角関数 $\sin x$，$\cos x$，$\tan x$ の極限は次のようになる.

1 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\sin x=0$

$\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\sin x=1$

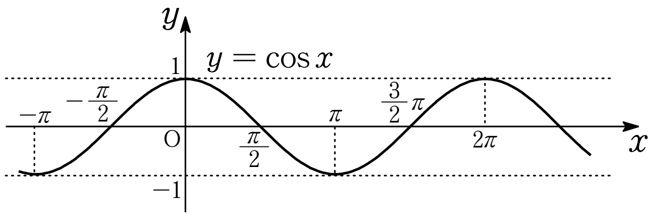
$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\sin x$ の極限はない.



2 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\cos x=1$

$\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\cos x=0$

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\cos x$ の極限はない.



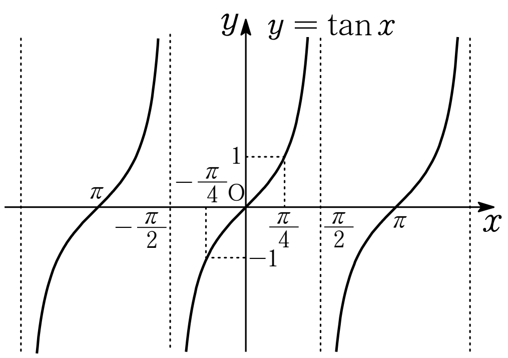
3 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\tan x=0$

$\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\tan x=\infty$

$\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}+0}\tan x=-\infty$

$\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\tan x$ の極限はない.

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\tan x$ の極限はない.



関数 $\dfrac{\sin x}{x}$ の極限

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

つまり 十分小さい x に対して $\sin x \fallingdotseq x$

考 あ $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ のとき

原点を O とする XY 平面 で，単位円 $X^2+Y^2=1$ 上に点 A(1, 0) と $\angle\mathrm{AOB}=x$ となる点 B をとり，直線 OB と直線 $X=1$ の交点を T とすると

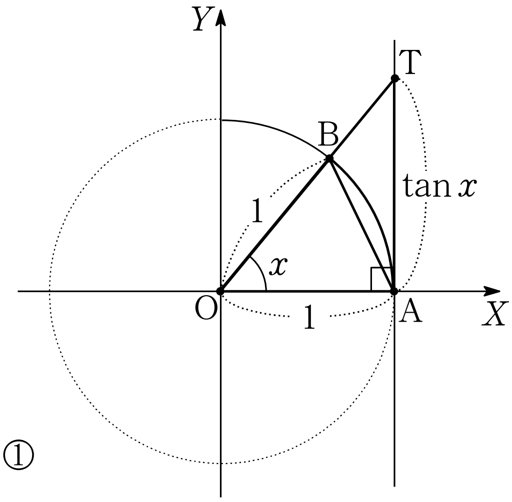
$\mathrm{B}(\cos x,\ \sin x)$，$\mathrm{T}(1,\ \tan x)$

△OAB，扇形 OAB，△OAT の面積をそれぞれ S_1，S_2，S_3 とすると

$$S_1=\frac{1}{2}\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OB}\cdot\sin x=\frac{\sin x}{2}$$

$$S_2=\frac{1}{2}\mathrm{OA}^2\cdot x=\frac{x}{2}$$

$$S_3=\frac{1}{2}\mathrm{OA}\cdot\mathrm{AT}=\frac{\tan x}{2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin x}{\cos x}$$



面積の大小関係から $S_1<S_2<S_3$ なので

$$\frac{\sin x}{2}<\frac{x}{2}<\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin x}{\cos x}$$

$\sin x>0$，$\cos x>0$ なので $\cos x<\dfrac{\sin x}{x}<1$

ここで $\displaystyle\lim_{x\to+0}\cos x=1$

はさみうちの原理を用いて $\displaystyle\lim_{x\to+0}\frac{\sin x}{x}=1$ ……①

い $x<0$ のとき

$x=-t$ とおくと $x\to-0$ ならば $t\to+0$ であるから

$$\lim_{x\to-0}\frac{\sin x}{x}=\lim_{t\to+0}\frac{\sin(-t)}{-t}=\lim_{t\to+0}\frac{\sin t}{t}=1\quad(\because ①)$$

よって，あ，い より $\displaystyle\lim_{x\to+0}\frac{\sin x}{x}=1$ かつ $\displaystyle\lim_{x\to-0}\frac{\sin x}{x}=1$ であるから

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

$\dfrac{\sin\square}{\square}$ の極限

$x\to a$ のとき $\square\to 0$ ならば $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{\sin\square}{\square}=1$

とくに a を 0，$\square$ を kx $(k\neq 0)$ として $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin kx}{kx}=1$

例 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{5x}=1$ $(k=5)$

$$\lim_{x\to\infty}x\sin\frac{1}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}=1\ \left(a\text{ を }\infty,\ \square\text{を}\frac{1}{x}\right)$$

三角関数を含む極限の準公式

$\boxed{1}$ $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=1$

$\boxed{2}$ $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$

考 $\boxed{1}$ $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x}\right)=1\cdot 0=0$

$\boxed{2}$ $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x^2(1+\cos x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x^2(1+\cos x)}$

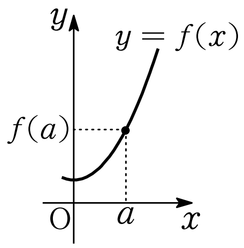
$$=\lim_{x\to 0}\left\{\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\cdot\frac{1}{1+\cos x}\right\}=1^2\cdot\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$$

関数の連続

関数 $f(x)$ の定義域に属する x の値 a において

$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ のとき

$f(x)$ は $x = a$ で 連続（れんぞく）であるという．

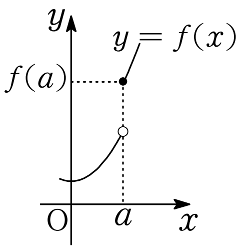


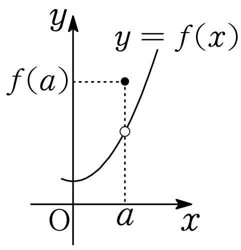
関数の不連続

関数 $f(x)$ が定義域に属する x の値 a において連続でないとき

$f(x)$ は $x = a$ で 不連続（ふれんぞく）であるという．

㊟例 不連続の例をあげると次がある．





(あ) については $\lim_{x \to a+0} f(x) \neq \lim_{x \to a-0} f(x)$ であるから $\lim_{x \to a} f(x)$ が存在しない．
すなわち $f(x)$ は $x = a$ で不連続．

(い) については $\lim_{x \to a+0} f(x) = \lim_{x \to a-0} f(x)$ であるから $\lim_{x \to a} f(x)$ が存在するが，
$\lim_{x \to a} f(x) \neq f(a)$ であるから $f(x)$ は $x = a$ で不連続．

関数の四則演算と連続

関数 $f(x)$，$g(x)$ がともに $x = a$ で連続ならば

関数の四則演算 $f(x) + g(x)$，　$f(x) - g(x)$，$f(x)g(x)$，$\dfrac{f(x)}{g(x)}$

もそれぞれ $x = a$ で連続である．

ただし　商 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ においては　$g(a) \neq 0$ とする．

(考) 関数の極限の性質

連続関数

関数 $f(x)$ が定義域のすべての x の値で連続であるとき

$f(x)$ は 連続関数（れんぞくかんすう）である という.

㊙ x^2, x^3, $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$, 2^x, $\log_{10} x$, $\dfrac{1}{x}$, $\sqrt{x}$, $|x|$, … はすべて連続関数.

区間

不等式を満たす値の範囲を 区間（くかん） といい

$a < x < b$ を (a, b) と表し 開区間（かいくかん） という.

$a \leqq x \leqq b$ を $[a, b]$ と表し 閉区間（へいくかん） という.

また，次のようにも表す.

$a \leqq x < b$ を $[a, b)$

$a < x \leqq b$ を $(a, b]$

$a < x$ を (a, ∞)

$a \leqq x$ を $[a, \infty)$

$x < b$ を $(-\infty, b)$

$x \leqq b$ を $(-\infty, b]$

実数全体を 1 つの区間と考え $(-\infty, \infty)$

㊙ 開区間 $2 < x < 3$ を $(2, 3)$，閉区間 $2 \leqq x \leqq 3$ を $[2, 3]$

区間で連続

関数 $f(x)$ がある区間 I に属するすべての値 x で連続であるとき

$f(x)$ は 区間 I で連続である または 区間 I で連続関数であるという.

最大値・最小値の原理

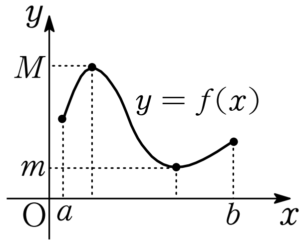
閉区間で連続な関数はその区間で 最大値 および 最小値 をもつ.

すなわち $[a,\ b]$ で定義された連続関数 $f(x)$ は

$f(x) \leqq M$ かつ $f(x) = M$ を満たす x が存在し,

$f(x) \geqq m$ かつ $f(x) = m$ を満たす x が存在する.

つまり $f(x)$ は最大値 M と最小値 m をもつ.



㊀ 関数 $f(x) = x^2 \ (-1 \leqq x \leqq 2)$ は最大値および最小値をもつ.

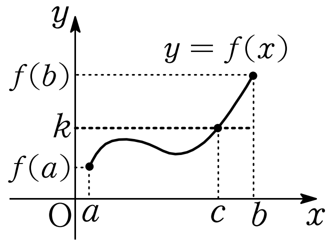
中間値の定理

関数 $f(x)$ が 閉区間 $[a,\,b]$ で連続で $f(a) \fallingdotseq f(b)$ ならば

$f(a)$ と $f(b)$ の間の任意の値 k に対して

$f(c)=k$ となるような実数 c が

a と b の間に少なくとも 1 つ存在する.



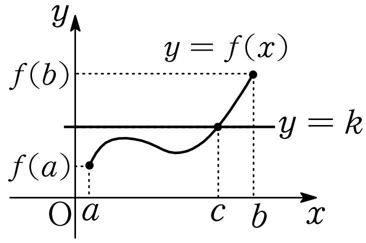
中間値の定理とグラフの共有点

関数 $f(x)$ が 閉区間 $[a,\,b]$ で連続で $f(a) \fallingdotseq f(b)$ ならば

$f(a)$ と $f(b)$ の間の任意の値 k に対して

$\begin{cases} y=f(x) \\ y=k \end{cases}$ の 2 つのグラフが

$a<x<b$ に少なくとも 1 つの共有点をもつ.



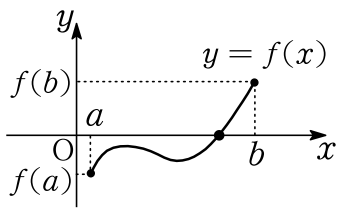
中間値の定理と方程式の実数解の存在

関数 $f(x)$ が 閉区間 $[a,\,b]$ で連続 で

$f(a)$ と $f(b)$ が異符号 つまり $f(a)f(b)<0$

ならば

方程式 $f(x)=0$ は a と b の間に少なくとも 1 つの実数解をもつ.



例 x の方程式 $3^x-4x=0$ が $1<x<2$ となる実数解をもつことを示す.

$f(x)=3^x-4x$ とおくと $f(x)$ は連続である.

$f(1)=3-4\cdot1=-1<0$

$f(2)=3^2-4\cdot2=1>0$

$f(1)$ と $f(2)$ は異符号である.

よって，中間値の定理から方程式 $f(x)=0$ は $1<x<2$ に少なくとも 1 つの実数解をもつ.

自然対数の底

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$$

ここで e は無理数で $e=2.718281828459045\cdots$ と知られている.

底が e である対数 $\log x=\log_e x$ を 自然対数（しぜんたいすう） という.

㊟ 数学 Ⅲ では $\log x$ は底が e とし，e を自然対数の底という.

㊫ この e は微積分に出てきて違う定義もあるが，とりあえず知っておけばと書いておく.

自然対数の極限の準公式

$\boxed{1}$ $$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$$

$\boxed{2}$ $$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$$

㊢ $\dfrac{1}{x}=t$ とおく $x=\dfrac{1}{t}$

$t\to\pm\infty$ とすると $x\to 0$

$\boxed{1}$ $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^n=\lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}}=e$

$\boxed{2}$ $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^n=\lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}}=e$

指数・対数の極限

$\boxed{1}$ $$\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x}=1$$

$\boxed{2}$ $$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$$

㊢ $\boxed{1}$ $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x}=\lim_{x\to 0}\log(1+x)^{\frac{1}{x}}=\log e=1$

$\boxed{2}$ $\boxed{1}$ で $\log(1+x)=t$ とおくと $1+x=e^t$ すなわち $x=e^t-1$

$x\to 0$ とすると $t\to 0$ であるから

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x}=\lim_{t\to 0}\frac{t}{e^t-1}$$

これが 1 になるから $\displaystyle\lim_{t\to 0}\frac{t}{e^t-1}=1$ すなわち $\displaystyle\lim_{t\to 0}\frac{e^t-1}{t}=1$

よって $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$

連続関数と極限

2 つの関数 $f(x)$，$g(x)$ について

$f(x)$ は連続関数，$\displaystyle\lim_{x\to a} g(x)=\alpha$ ならば

$$\lim_{x\to a} f\bigl(g(x)\bigr)=f\Bigl(\lim_{x\to a} g(x)\Bigr)=f(\alpha)$$

㊓ この性質は $x\to a$ を $x\to\infty$，$x\to-\infty$，$x\to a+0$，$x\to a-0$ としても成り立つ.

㊣ 無意識のうちに使っている定理かもしれない.

㊞ $\displaystyle\lim_{x\to 0}\sin(x+p)=\sin p$ という当たり前の極限も

$f(x)=\sin x$ は連続関数であるから $\displaystyle\lim_{x\to 0}\sin(x+p)=\sin\Bigl(\lim_{x\to 0}(x+p)\Bigr)=\sin p$

対数関数と極限

正の値をとる関数 $g(x)$ について

$$\lim_{x\to a}\log g(x)=\log\alpha \quad \text{ならば} \quad \lim_{x\to a} g(x)=\alpha$$

㊓ この性質は $x\to a$ を $x\to\infty$，$x\to-\infty$，$x\to a+0$，$x\to a-0$ としても成り立つ.

㊋ $\log x$ は連続 かつ 単調増加であるから成り立つ.

㊣ 地味によく使う定理である.

㊞ $\displaystyle\lim_{x\to 1}\log g(x)=\log 3$ ならば $\displaystyle\lim_{x\to 1} g(x)=3$