数学 II　複素数と方程式

~高校数学のまとめ~

教科書をもとに定義や定理を独自にパネル形式でまとめています．
何度も書き直し，加筆修正を繰り返しており，完成したものではありません．
人によっては不要な部分もあるでしょう．そういうときは読み飛ばしてください．

虚数単位

2 乗すると -1 になる新しい数を 1 つ考えて，これを文字 i で表す．

すなわち $i^2=-1$ とする．

この i を 虚数単位（きょすうたんい）という．

負の数の平方根

$a>0$ のとき $\sqrt{-a}=\sqrt{a}\,i$ と定める．

とくに $a=1$ ならば $\sqrt{-1}=i$

$a>0$ のとき $-a$ の平方根 は $\pm\sqrt{-a}=\pm\sqrt{a}\,i$

例 -4 の平方根は $\pm\sqrt{-4}=\pm\sqrt{4}\,i=\pm 2i$

複素数

i と 2 つの実数 a，b を用いて，数 z が

$$z = a + bi$$

と表されるとき z を 複素数（ふくそすう）という．

このとき

1. a を z の 実部（じつぶ）(real part) という．
2. b を z の 虚部（きょぶ）(imaginary part) という．

虚数と純虚数

複素数 $z = a + bi$ (a，b は実数) について

1. $b = 0$ のとき $z = a$ を 実数（じっすう）という．
2. $b \neq 0$ のとき $z = a + bi$ を 虚数（きょすう）という．
3. $a = 0$, $b \neq 0$ のとき $z = bi$ を 純虚数（じゅんきょすう）という．

複素数の相当

2 つの複素数が等しいとは実部と虚部がそれぞれ等しいことである．

すなわち a，b，c，d を実数とするとき

1. $a + bi = 0 \iff a = 0$ かつ $b = 0$
2. $a + bi = c + di \iff a = c$ かつ $b = d$

共役複素数

a, b を実数とする．

2 つの複素数 $a+bi$ と $a-bi$ を互いに共役（きょうやく）な複素数（ふくそすう）という．

複素数 z と共役な複素数 を $\overline{z}$ と表す．

つまり 実部が同じで虚部の符号が異なる複素数を互いに共役であるといい

複素数 $z=a+b\,i$ の共役な複素数は $\overline{z}=a-bi$ である．

互いに共役な複素数の和と積

a, b を実数とする．

複素数 $z=a+b\,i$ と共役な複素数 $\overline{z}=a-bi$ について

和：$z+\overline{z}=(a+bi)+(a-bi)=2a$

積：$z\,\overline{z}=(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2$

これらはともに実数である．

複素数の四則演算

a, b, c, d を実数とする．

和：$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$

差：$(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i$

積：$(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i$

商：$$\frac{c+di}{a+bi}=\frac{(c+di)(a-bi)}{(a+bi)(a-bi)}$$

$$=\frac{ac+bd}{a^2+b^2}+\frac{ad-bc}{a^2+b^2}i$$ ただし $(a,\,b)\neq(0,\,0)$

複素数の基本性質

複素数には次の性質がある.

1. 複素数の四則計算 (和, 差, 積, 商) は複素数である.
2. 2 つの複素数 z, w について
$$zw = 0 \iff z = 0 \text{ または } w = 0$$
3. 虚数は大小関係や正, 負は考えない.

平行の形の 2 次方程式の解

k を実数とする.

x の 2 次方程式 $x^2 = k$ の解は $x = \pm\sqrt{k}$

次のように k の値で解がわかる.

1. $k > 0 \iff$ 異なる 2 つの実数解 $x = \pm\sqrt{k}$
2. $k = 0 \iff$ ただ 1 つの実数解 $x = 0$
3. $k < 0 \iff$ 異なる 2 つの共役な虚数解 $x = \pm\sqrt{-k}\, i$

例
1. 2 次方程式 $x^2 = 3$ の解は $x = \pm\sqrt{3}$ の異なる 2 つの実数
2. 2 次方程式 $x^2 = 0$ の解は $x = 0$ のただ 1 つの実数
3. 2 次方程式 $x^2 = -3$ の解は $x = \pm\sqrt{3}\, i$ の異なる 2 つの虚数

2次方程式の解 I

a，b，c は実数，$a \neq 0$ とする．

x の2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解は

判別式を $D=b^2-4ac$ として，次のように D の値で解がわかる．

$\boxed{1}$ $D>0 \iff$ 異なる2つの実数解 $x=-\dfrac{b\pm\sqrt{D}}{2a}$

$\boxed{2}$ $D=0 \iff$ ただ1つの実数解 $x=\dfrac{-b}{2a}$

$\boxed{3}$ $D<0 \iff$ 異なる2つの共役な虚数解 $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{-D}\,i}{2a}$

とくに

$D \geqq 0 \iff$ 実数解をもつ

$D<0 \iff$ 虚数解をもつ

2次方程式の解 II

a，b'，c は実数，$a \neq 0$ とする．

x の2次方程式 $ax^2+2b'x+c=0$ の解は

$\dfrac{D}{4}=b'^2-ac$ として，次のように D の値で解がわかる．

$\boxed{1}$ $D>0 \iff$ 異なる2つの実数解 $x=\dfrac{-b'\pm\sqrt{\dfrac{D}{4}}}{a}$

$\boxed{2}$ $D=0 \iff$ ただ1つの実数解 $x=-\dfrac{b'}{a}$

$\boxed{3}$ $D<0 \iff$ 異なる2つの共役な虚数解 $x=\dfrac{-b'\pm\sqrt{-\dfrac{D}{4}}\,i}{a}$

2次方程式の解と係数の関係

a, b, c は実数，$a \neq 0$ とする.

x の2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解を $x=\alpha, \beta$ とすると

$$\begin{cases} \alpha+\beta = -\dfrac{b}{a} \\ \alpha\beta = \dfrac{c}{a} \end{cases}$$

㊕（解の公式を使う）

解は $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ であるから

$$\alpha+\beta = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} + \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a}$$

$$\alpha\beta = \frac{(-b-\sqrt{b^2-4ac})(-b+\sqrt{b^2-4ac})}{2a \cdot 2a} = \frac{b^2-(b^2-4ac)}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

㊕（恒等式を考える）

$$\begin{aligned} ax^2+bx+c &= a(x-\alpha)(x-\beta) \\ &= ax^2 - a(\alpha+\beta)x + a\alpha\beta \end{aligned}$$

これは x の恒等式であるから

$$\begin{cases} b = -a(\alpha+\beta) \\ c = a\alpha\beta \end{cases}$$

$a \neq 0$ であるから $\begin{cases} \alpha+\beta = -\dfrac{b}{a} \\ \alpha\beta = \dfrac{c}{a} \end{cases}$

2数を解とする2次方程式

$$\begin{cases} \alpha+\beta = p \\ \alpha\beta = q \end{cases}$$

を満たすとすると α, β が解となる2次方程式の1つは

$$x^2 - px + q = 0$$

㊟ 2次方程式の解と係数の関係の逆である.

㊕ α, β が解となる2次方程式の1つは

$(x-\alpha)(x-\beta)=0$ すなわち $x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0$

これに $\begin{cases} \alpha+\beta = p \\ \alpha\beta = q \end{cases}$ を代入して $x^2-px+q=0$

実数条件

p，q を実数とする．

$$\begin{cases}\alpha+\beta=p\\ \alpha\beta=q\end{cases}$$

を満たすとき，α，β が実数になる必要十分条件は

$$p^2-4q \geqq 0$$

㊎ α，β が解となる 2 次方程式の 1 つは

$(x-\alpha)(x-\beta)=0$ より $x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0$

すなわち $x^2-px+q=0$

これが実数解をもつことが条件なので判別式を D として

$D=p^2-4q \geqq 0$

㊀ $(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=p^2-4q \geqq 0$

㊉ $D=p^2-4q<0$ ならば α，β は実数ではない（虚数）

2 次方程式と実数解の符号

a，b，c は実数，$a \neq 0$ とする．

x の 2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解を $x=\alpha, \beta$，判別式を $D=b^2-4ac$ とするとき

1 α, β は異なる 2 つの正の解 $\iff$ $D>0$ かつ $\alpha+\beta>0$ かつ $\alpha\beta>0$

2 α, β は異なる 2 つの負の解 $\iff$ $D>0$ かつ $\alpha+\beta<0$ かつ $\alpha\beta>0$

3 α, β は異符号の解 $\iff$ $\alpha\beta<0$

㊉ 2 次関数のグラフを考えてもよい．

㊎ α，β が実数であるから $D>0$

1 $\alpha>0$ かつ $\beta>0$ $\iff$ $\alpha+\beta>0$ かつ $\alpha\beta>0$

2 $\alpha<0$ かつ $\beta<0$ $\iff$ $\alpha+\beta<0$ かつ $\alpha\beta>0$

3 α, β が異符号 $\iff$ $\alpha\beta<0$

㊉ 3 $\alpha\beta<0 \iff \dfrac{c}{a}<0$

すなわち a と c は異符号なので $ac<0$

このとき $D=b^2-4ac>0$

3 次方程式の解と係数の関係

$a,\ b,\ c,\ d$ は実数，$a \neq 0$ とする．

x の 3 次方程式 $ax^3+bx^2+cx+d=0$ の解を $x=\alpha, \beta, \gamma$ とすると

$$\begin{cases} \alpha+\beta+\gamma = -\dfrac{b}{a} \\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha = \dfrac{c}{a} \\ \alpha\beta\gamma = -\dfrac{d}{a} \end{cases}$$

考 $ax^3+bx^2+cx+d = a(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$

$= ax^3 - a(\alpha+\beta+\gamma)x^2 + a(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)x - a\alpha\beta\gamma$

これは x の恒等式であるから

$$\begin{cases} b = -a(\alpha+\beta+\gamma) \\ c = a(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha) \\ d = -a\alpha\beta\gamma \end{cases}$$

$a \neq 0$ であるから $\begin{cases} \alpha+\beta+\gamma = -\dfrac{b}{a} \\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha = \dfrac{c}{a} \\ \alpha\beta\gamma = -\dfrac{d}{a} \end{cases}$

3 数を解とする 3 次方程式

$$\begin{cases} \alpha+\beta+\gamma = p \\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha = q \\ \alpha\beta\gamma = r \end{cases}$$

を満たすとき $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ が解となる 3 次方程式の 1 つは

$$x^3 - px^2 + qx - r = 0$$

補 3 次方程式の解と係数の関係の逆である．

考 $\alpha,\ \beta$ が解となる 3 次方程式の 1 つは

$(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma) = 0$

すなわち　$x^3 - (\alpha+\beta+\gamma)x^2 + (\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)x - \alpha\beta\gamma = 0$

これに $\begin{cases} \alpha+\beta+\gamma = p \\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha = q \\ \alpha\beta\gamma = r \end{cases}$ を代入して　$x^3 - px^2 + qx - r = 0$

高次方程式

n を自然数，a_n，a_{n-1}，$\cdots$，a_1，a_0 を実数，$a_n \neq 0$ とする．

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0 = 0$$

の形で表される x の方程式を x についての **n 次方程式** という．

とくに 3 次以上の方程式を **高次（こうじ）方程式** という．

方程式を満たす x の値を方程式の **解（かい）** といい，

方程式の解をすべて求めることを方程式を **解く** という．

㊟ 代数学では解を根（こん）という．
解は方程式を満たす値の集合の要素と解釈できる．

高次方程式の解の個数

n 次方程式の解の個数は **高々（たかだか）n 個** である．（最大 n 個の解をもつ）

㊢ 「高々 n 個」とは「多くとも n 個」「n 個以下」という意味である．

㊟ 代数学では解を根（こん）と言い，重解は重根という．
解は方程式を満たす値の集合の要素と解釈できる．

㊫ 2 次方程式は 高々 2 個の複素数の解をもつ．重解の場合は 1 個になる．
3 次方程式は 高々 3 個の複素数の解をもつ．

恒等的に 0 になる整式

n 次以下の整式 $f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$

について，異なる $n+1$ 個の数 α_1，α_2，$\cdots$，α_n，α_{n+1} に対し

$$f(\alpha_1) = f(\alpha_2) = \cdots = f(\alpha_n) = f(\alpha_{n+1}) = 0$$

ならば

$$a_n = a_{n-1} = \cdots = a_1 = a_0 = 0$$

すなわち 整式 $f(x) = 0$

組立除法

3 次の整式 $P(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ を $(x-k)$ で割ると

$$
\begin{array}{r@{}llll}
 & ax^2 & +(ak+b)x & +ak^2+bk+c & \\ \cline{2-5}
x-k \,\big) & ax^3 & +bx^2 & +cx & +d \\
 & ax^3 & -akx^2 & & \\ \cline{2-5}
 & & (ak+b)x^2 & +cx & \\
 & & (ak+b)x^2 & -(ak^2+bk)x & \\ \cline{3-5}
 & & & (ak^2+bk+c)x & +d \\
 & & & (ak^2+bk+c)x & -(ak^3+bk^2+ck) \\ \cline{4-5}
 & & & & ak^3+bk^2+ck+d
\end{array}
$$

これより

商は $ax^2+(ak+b)x+ak^2+bk+c$

余りは ak^3+bk^2+ck+d

これを次のように求めることもできる.

$P(x)$ の係数を抜き出し, $(x-k)$ が 0 となる x の値 k を左上に書き,
たす (下ろす), かけるを繰り返す.

$$
\begin{array}{c|cccc}
k & a & b & c & d \\ \cline{1-1}
 & & ak & ak^2+bk & ak^3+bk^2+ck \\ \hline
 & a & ak+b & ak^2+bk+c & \multicolumn{1}{|c}{ak^3+bk^2+ck+d}
\end{array}
$$

下段の左側が商の係数, 右側が余りとなる.

この方法を **組立除法**（くみたてじょほう） という.

とくに $P(k)=0$ とすると

$ak^3+bk^2+ck+d=0$ を満たすので 余りが 0 になる.

このことから

$$P(k)=(x-k)\left\{ax^2+(ak+b)x+ak^2+bk+c\right\}$$

と因数分解できる.

要 x の係数が 1 の 1 次式で割るときは組立除法が有効である.

例 $P(x)=x^3+4x^2-8$ について $P(-2)=0$

右の組立除法から

$P(x)=(x+2)(x^2+2x-4)$

$$
\begin{array}{r|rrrr}
-2 & 1 & 4 & 0 & -8 \\ \cline{1-1}
 & & -2 & -4 & 8 \\ \hline
 & 1 & 2 & -4 & \multicolumn{1}{|r}{0}
\end{array}
$$

整数係数の高次方程式と有理数解

n は自然数，a_n，a_{n-1}，$\cdots$，a_1，a_0 はすべて整数，$a_n \neq 0$，$a_0 \neq 0$ とする．

整数係数の n 次方程式

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0 = 0$$

が 0 以外の有理数の解をもつならば，その解は

$$x = \frac{a_0\text{の約数}}{a_n\text{の約数}}$$

の形になる．

とくに $a_n = 1$ ならば 解は $x = (a_0\text{の約数})$ となり整数に限られる．

考 有理数の解を

$x = \dfrac{q}{p}$（p，q は互いに素な整数，$p > 0$，$q \neq 0$）……①

とすると

$a_n\left(\dfrac{q}{p}\right)^n + a_{n-1}\left(\dfrac{q}{p}\right)^{n-1} + \cdots + a_1\left(\dfrac{q}{p}\right) + a_0 = 0$ ……⊛

⊛ の両辺に p^{n-1} をかけて

$\dfrac{a_n q^n}{p} + a_{n-1}q^{n-1} + \cdots + a_1 p^{n-2}q + a_0 p^{n-1} = 0$

すなわち $\dfrac{a_n q^n}{p} = -\left(a_{n-1}q^{n-1} + \cdots + a_1 p^{n-2} + a_0 p^{n-1}\right)$

ここで (右辺) は整数であるから $\dfrac{a_n q^n}{p}$ も整数である．

p，q は互いに素であるから **p は a_nの約数** ……②

次に，⊛ の両辺に $\dfrac{p^n}{q}$ をかけて

$a_nq^{n-1} + a_{n-1}pq^{n-2} + \cdots + a_1 p^{n-1} + \dfrac{a_0 p^n}{q} = 0$

すなわち $\dfrac{a_0 p^n}{q} = -\left(a_nq^{n-1} + a_{n-1}pq^{n-2} + \cdots + a_1 p^{n-1}\right)$

ここで (右辺) は整数であるから $\dfrac{a_0 p^n}{q}$ も整数である．

p，q は互いに素であるから **q は a_0の約数** ……③

よって，②，③ を ① へ代入して 有理数の解は $x = \dfrac{a_0\text{の約数}}{a_n\text{の約数}}$ の形になる．

実数係数の高次方程式と虚数解

n は自然数，a_n，a_{n-1}，…，a_1，a_0 はすべて実数，$a_n \neq 0$ とする．

実数係数の n 次方程式

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$$

が虚数解 α をもつならば，共役な虚数 $\overline{\alpha}$ も解となる．

考　$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$

とおく．

$f(x) = 0$ が虚数解 α をもつならば　$f(\alpha) = 0$　……①

$\alpha = p + qi$（p，q は実数，$q \neq 0$）とすると　$\overline{\alpha} = p - qi$

$\alpha + \overline{\alpha} = 2p$，$\alpha \cdot \overline{\alpha} = p^2 + q^2$

α，$\overline{\alpha}$ が解となる 2 次方程式の 1 つは　$x^2 - 2px + p^2 + q^2 = 0$

$g(x) = x^2 - 2px + p^2 + q^2$ とおくと　$g(\alpha) = g(\overline{\alpha}) = 0$　……②

$f(x)$ を $g(x)$ で割ると，商を $Q(x)$，余りは $ax + b$（a，b は実数）とおけて

$f(x) = g(x)Q(x) + ax + b$　……③

と表せる．

$f(\alpha) = g(\alpha)Q(\alpha) + a\alpha + b$ と ①，② から

$a\alpha + b = 0$

a，b は実数，α は虚数であるから　$a = 0$ かつ $b = 0$　……④

④ を ③ へ代入して　$f(x) = g(x)Q(x)$

$x = \overline{\alpha}$ として　$f(\overline{\alpha}) = g(\overline{\alpha})Q(\overline{\alpha}) = 0$（∵ ②）

よって，$\overline{\alpha}$ も解となる．

1 の 3 乗根

1 の 3 乗根で虚数であるものを ω とおくと，次が成り立つ．

$\boxed{1}$ $\omega^3 = 1$

$\boxed{2}$ $\omega^2 + \omega + 1 = 0$

$\boxed{3}$ $\omega = \dfrac{-1 \pm \sqrt{3}\,i}{2}$

考 $\boxed{1}$ 1 の 3 乗根が ω であるから　$\omega^3 = 1$

$\boxed{2}$ $\omega^3 - 1 = 0$　すなわち　$(\omega - 1)(\omega^2 + \omega + 1) = 0$

$\omega \neq 1$ であるから　$\omega^2 + \omega + 1 = 0$

$\boxed{3}$ 解の公式より　$\omega = \dfrac{-1 \pm \sqrt{3}\,i}{2}$