

数学B 数列

~高校数学のまとめ~

教科書をもとに定義や定理を独自にパネル形式でまとめています。

何度も書き直し，加筆修正を繰り返しており，完成したものではありません。

人によっては不要な部分もあるでしょう。そういうときは読み飛ばしてください。

© ささきまこむ

数列

数を一列に並べたものを ^{すうれつ}数列 といい、並べられた各数を数列の ^{こう}項 という。

数列の項は 最初の項から順に ^{だいいちこう}第 1 項, ^{だいにこう}第 2 項, ^{だいさんこう}第 3 項, … という。

とくに 最初の項を ^{しょこう}初項 といい, n 番目の項を ^{だいえんこう}第 n 項 という。

有限数列と無限数列

① 項の個数が有限である数列を ^{ゆうげんすうれつ}有限数列 といい

項の個数を ^{こうすう}項数, 最後の項を ^{まっこう}末項 という。

② 項の個数が限りなく続く数列を ^{むげんすうれつ}無限数列 という。

数列の表記

数列を一般的に表すには

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$$

のようにかき, この数列を $\{a_n\}$ のように表記することがある。

数列 $\{a_n\}$ の第 n 項 a_n を n の式で表し, これを数列 $\{a_n\}$ の ^{いっばんこう}一般項 という。

④ 例 $2, 4, 6, \dots, 2n, \dots$ ならば

$$a_1 = 2, a_2 = 4, a_3 = 6, \dots, a_n = 2n$$

数列 $\{a_n\}$ の一般項は $2n$

要

数列 $\{a_n\}$ の一般項は定義域が自然数の関数 $f(n)$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) と同じ意味

④ 考 $a_1 = f(1), a_2 = f(2), \dots, a_n = f(n)$

n を決めると a_n の値が 1 つ定まる関係である。

等差数列の和 2

等差数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を S_n とすると、公差を d として

$$S_n = \underbrace{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}_{n \text{ 個}} = \frac{n}{2} \{2a_1 + d(n-1)\}$$

つまり

$$(\text{等差数列の和}) = \frac{(\text{項数})}{2} \{2 \times (\text{初項}) + (\text{公差}) \times (\text{項数} - 1)\}$$

⑧ $S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$

に $a_n = a_1 + d(n-1)$ を代入して

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{n}{2} \{a_1 + a_1 + d(n-1)\} \\ &= \frac{n}{2} \{2a_1 + d(n-1)\} \end{aligned}$$

⑨ 個人的には使うことがない公式

等比数列

数列 $\{a_n\}$ において、各項に一定の数 r をかけると次の項が得られるとき

この数列を ^{とうひすうれつ}等比数列 ^{こうひ} といひ r をその ^{こうひ}公比 ^{いいう} という。

この数列は次の関係式を満たす。

$$a_{n+1} = r a_n$$

$$a_n, a_{n+1} \\ \xrightarrow{\times r}$$

等比数列の一般項

数列 $\{a_n\}$ を初項 $a_1 = a$ 、公比 r の等比数列とするとき

$$a_n = a r^{n-1}$$

つまり

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n \\ \xrightarrow{\times r} \quad \xrightarrow{\times r} \quad \quad \quad \xrightarrow{\times r}$$

$$(\text{等比数列の第 } n \text{ 項}) = (\text{初項}) \times (\text{公比})^{n-1}$$

⊙ 初項 $a_1 = a$ に $a_1 \wedge a_2 \wedge a_3 \wedge \dots \wedge a_n$ の間 \wedge の $(n-1)$ 個の公比 r をかける

等比数列の和

初項 a 、公比 r の等比数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を S_n とすると

$$S_n = \underbrace{a + ar + ar^2 + \dots + ar^{n-1}}_{n \text{ 個}}$$

$$= \begin{cases} an & (r = 1) \\ \frac{a(1-r^n)}{1-r} = \frac{a(r^n-1)}{r-1} & (r \neq 1) \end{cases}$$

$$\text{つまり (公比) } \neq 1 \text{ ならば (等比数列の和)} = \frac{(\text{初項})\{1 - (\text{公比})^{(\text{項数})}\}}{1 - (\text{公比})}$$

⊙ $r = 1$ のとき $S_n = \underbrace{a + a + a + \dots + a}_{n \text{ 個}} = an$

$r \neq 1$ のとき

$$S_n = a + ar + ar^2 + \dots + ar^{n-1} \quad \dots \textcircled{1}$$

$$rS_n = ar + ar^2 + \dots + ar^{n-1} + ar^n \quad \dots \textcircled{2}$$

① - ② として

$$(1-r)S_n = a - ar^n \\ = a(1-r^n)$$

$$1-r \neq 0 \text{ であるから } S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$$

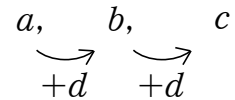
等差中項

a, b, c がこの順で等差数列のとき b を ^{とうさちゆうこう} 等差中項 といひ

$$b = \frac{a+c}{2} \quad \text{すなわち} \quad 2b = a+c$$

① a, b, c がこの順で等差数列のとき、公差を d とすると $a = b - d, c = b + d$

$$\frac{a+c}{2} = \frac{(b-d) + (b+d)}{2} = b$$



② 2, 5, 8 はこの順で等差数列で等差中項は 5

③ 等差中項は 3 つのデータの平均値, 中央値になる.

等比中項

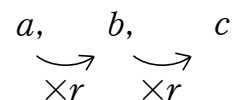
a, b, c はすべて 0 でないとする.

a, b, c がこの順で等比数列のとき b を ^{とうひちゆうこう} 等比中項 といひ

$$b^2 = ac$$

① a, b, c がこの順で等比数列のとき、公比を r ($\neq 0$) とすると $a = \frac{b}{r}, c = br$

$$ac = \frac{b}{r} \cdot br = b^2$$



② 2, 6, 18 はこの順で等比数列で等比中項は 6

③ $b^2 > 0$ なので $ac > 0$ つまり a と c は同符号である.

定数数列

数列 $\{a_n\}$ において、どの項も n によらない一定の数であるとき

この数列を ^{ていすうすうれつ} 定数数列 といひ.

この数列は次の関係式を満たす.

$$a_{n+1} = a_n$$

① $a_n = 3$ は定数数列

② 公比が 1 の等比数列, 公差が 0 の等差数列と考えてもよい.

和の記号 Σ

数列 $\{a_n\}$ の a_p から a_q までの和を

$$\sum_{k=p}^q a_k = a_p + a_{p+1} + a_{p+2} + \cdots + a_q$$

とかく.

すなわち $\sum_{k=p}^q a_k$ は k を $p, p+1, \dots, q$ としたときのすべての a_k の和を表す.

とくに 数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を

$$\sum_{k=1}^n a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$$

とかく.

補 Σ はギリシャ文字で「シグマ」とよむ

Σ の基本性質

Σ は変数の取り方に関係なく同じ和になる.

すなわち

$$\sum_{k=1}^n a_k = \sum_{i=1}^n a_i$$

例 $\sum_{k=1}^n k^2 = \sum_{i=1}^n i^2$

Σ の性質

① $\sum_{k=1}^n (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^n a_k + \sum_{k=1}^n b_k$

② $\sum_{k=1}^n (a_k - b_k) = \sum_{k=1}^n a_k - \sum_{k=1}^n b_k$

③ p を k に無関係な定数とすると $\sum_{k=1}^n p a_k = p \sum_{k=1}^n a_k$

①, ②, ③ をまとめて, 2つの数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ と k に無関係な定数 s, t に対して

$$\sum_{k=1}^n (s a_k + t b_k) = s \sum_{k=1}^n a_k + t \sum_{k=1}^n b_k$$

数列の和の公式

$$\text{①} \quad \sum_{k=1}^n c = \underbrace{c + c + \cdots + c}_{n \text{ 個}} = cn$$

$$\text{②} \quad \sum_{k=1}^n k = 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\text{③} \quad \sum_{k=1}^n k^2 = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\text{④} \quad \sum_{k=1}^n k^3 = 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \left\{ \frac{n(n+1)}{2} \right\}^2$$

$$\text{⑤} \quad \sum_{k=1}^n r^{k-1} = \underbrace{1 + r + r^2 + \cdots + r^{n-1}}_{n \text{ 個}} = \frac{1-r^n}{1-r} = \frac{r^n-1}{r-1} \quad (r \neq 1)$$

② 初項 1, 末項 n , 項数 n の等差数列の和

$$\text{③} \quad k^3 - (k-1)^3 = 3k^2 - 3k + 1$$

$k = 1, 2, \dots, n$ として和をとると

$$\sum_{k=1}^n \{k^3 - (k-1)^3\} = \sum_{k=1}^n (3k^2 - 3k + 1)$$

$$\text{これより} \quad n^3 = 3 \sum_{k=1}^n k^2 - 3 \cdot \frac{n(n+1)}{2} + n$$

$$\begin{aligned} \text{すなわち} \quad 3 \sum_{k=1}^n k^2 &= n(n+1)(n-1) + \frac{3n(n+1)}{2} \\ &= \frac{n(n+1)}{2} \{2(n-1) + 3\} \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{2} \end{aligned}$$

$$\text{よって} \quad \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\text{③} \quad k^2 - k = (k-1)k = \frac{1}{3} \{(k-1)k(k+1) - (k-2)(k-1)k\}$$

$k = 1, 2, \dots, n$ として和をとると

$$\sum_{k=1}^n (k^2 - k) = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n \{(k-1)k(k+1) - (k-2)(k-1)k\}$$

$$\text{すなわち} \quad \sum_{k=1}^n k^2 - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{1}{3} (n-1)n(n+1)$$

$$\begin{aligned} \text{よって} \quad \sum_{k=1}^n k^2 &= \frac{n(n+1)}{6} \{3 + 2(n-1)\} \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \end{aligned}$$

④ ③ と同じように示せる。(スペースをとるので略)

⑤ 初項 1, 公比 r , 項数 n の等比数列の和

補 ② の和を 2 乗すると ④ の和になる。

階差と和

差の形を利用して次のように和を求めることができる.

$$\textcircled{1} \sum_{k=1}^n \{f(k+1) - f(k)\} = f(n+1) - f(1)$$

$$\textcircled{2} \sum_{k=1}^n \{f(k) - f(k+1)\} = f(1) - f(n+1)$$

$$\begin{aligned} \textcircled{\text{考}} \textcircled{1} \quad & \sum_{k=1}^n \{f(k+1) - f(k)\} \\ &= \{f(2) - f(1)\} + \{f(3) - f(2)\} + \{f(4) - f(3)\} + \dots + \{f(n+1) - f(n)\} \\ &= f(n+1) - f(1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{2} \quad & \sum_{k=1}^n \{f(k) - f(k+1)\} \\ &= \{f(1) - f(2)\} + \{f(2) - f(3)\} + \{f(3) - f(4)\} + \dots + \{f(n) - f(n+1)\} \\ &= f(1) - f(n+1) \end{aligned}$$

$$\textcircled{\text{補}} \textcircled{1} \text{ を少しアレンジして } \sum_{k=1}^n \{f(k) - f(k-1)\} = f(n) - f(0)$$

$$\begin{aligned} \textcircled{\text{例}} \quad & \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\ &= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \\ &= 1 - \frac{1}{n+1} \\ &= \frac{n}{n+1} \end{aligned}$$

Σ の変換

次のような和は変形できる.

$$\textcircled{1} \quad p \text{ を整数として } \sum_{k=1}^n f(k-p) = \sum_{k=1-p}^{n-p} f(k)$$

$$\textcircled{2} \quad \sum_{k=0}^n f(n-k) = \sum_{k=0}^n f(k)$$

$$\textcircled{\text{例}} \textcircled{1} \quad \sum_{k=1}^n (k-1)^2 = 0^2 + 1^2 + 2^2 + \dots + (n-1)^2 = \sum_{k=0}^{n-1} k^2$$

$$\textcircled{2} \quad \sum_{k=0}^n (n-k)^2 = n^2 + (n-1)^2 + \dots + 2^2 + 1^2 + 0^2 = \sum_{k=0}^n k^2 \text{ (たす順番を逆にした)}$$

一般項が (等差数列) × (等比数列) となる数列の和

p, q, a, r を k に無関係な定数, $p \neq 0, r \neq 1$ とする.

$$S_n = \sum_{k=1}^n \{(pk + q) \cdot ar^{k-1}\}$$

すなわち $S_n = \sum_{k=1}^n \{(\text{等差数列}) \times (\text{公比 } r \text{ の等比数列})\}$ は

次のように求めることができる.

① $S_n - rS_n$ を計算する

② $(pk + q) \cdot ar^{k-1} = f(k) - f(k-1)$ と変形する.

例 ① $S_n = \sum_{k=1}^n k \cdot 2^{k-1}$ を求める.

① $S_n = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 2^2 + \dots + n \cdot 2^{n-1} \dots\dots ①$

$2S_n = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 2^2 + \dots + (n-1) \cdot 2^{n-1} + n \cdot 2^n \dots\dots ②$

① - ② として

$$-S_n = \underbrace{1 + 2 + 2 \cdot 2^2 + \dots + 2^{n-1}} - n \cdot 2^n$$

$$= \underbrace{\frac{2^n - 1}{2 - 1}} - n \cdot 2^n$$

$$= (1 - n) \cdot 2^n + 1$$

よって $S_n = (n - 1) \cdot 2^n + 1$

② $f(k) = (ak + b) \cdot 2^k$ とおくと

$$\begin{aligned} k \cdot 2^{k-1} &= f(k) - f(k-1) \\ &= (ak + b) \cdot 2 \cdot 2^{k-1} - \{a(k-1) + b\} \cdot 2^{k-1} \\ &= (ak + a + b) \cdot 2^{k-1} \end{aligned}$$

k の恒等式として $\begin{cases} a = 1 \\ a + b = 0 \end{cases} \therefore a = 1, b = -1$

このことから $f(k) = (k - 1) \cdot 2^{k-1}$

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n k \cdot 2^{k-1} \\ &= \sum_{k=1}^n \{f(k) - f(k-1)\} \\ &= f(n) - f(0) \\ &= 2^n(n-1) - (-1) \\ &= (n-1) \cdot 2^n + 1 \end{aligned}$$

数列の和と一般項

数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

について

① $n = 1$ のとき $a_1 = S_1$

② $n \geq 2$ のとき $a_n = S_n - S_{n-1}$

すなわち

$$a_n = \begin{cases} S_1 & (n = 1) \\ S_n - S_{n-1} & (n \geq 2) \end{cases}$$

③ ① $S_1 = a_1$

② $n \geq 2$ のとき

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$S_{n-1} = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

① - ② として $S_n - S_{n-1} = a_n$

階差数列

数列 $\{a_n\}$ の隣り合う 2 つの項の差 $a_{n+1} - a_n = b_n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$)

を項とする数列 $\{b_n\}$ を数列 $\{a_n\}$ の かいさすうれつ 階差数列 という。

階差数列と一般項

数列 $\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とする。

つまり

$$a_{n+1} - a_n = b_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

とすると

$$n \geq 2 \text{ のとき } a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k$$

④ $n \geq 2$ のとき $a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} (a_{k+1} - a_k)$
 $= a_1 + (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + \cdots + (a_n - a_{n-1})$
 $= a_n$

群数列の解法ぐんすうれつ

群数列 は 各群の最後 (群尾) が第何項であるかを調べる

(最初から項がいくつあるかをチェック)

漸化式

数列において、その前の項から次の項をただ 1 通りに定める規則を示す等式を
ぜんかしき
 漸化式 という。

漸化式を満たす数列の一般項を漸化式の解といい、

その解を求めることを漸化式を解くという。

とくに 数列 $\{a_n\}$ において

$a_{n+1} = f(a_n)$ となる漸化式を りんせつ に こうかんぜんかしき 隣接二項間漸化式 という。

$a_{n+2} = F(a_{n+1}, a_n)$ となる漸化式を りんせつさんこうかんぜんかしき 隣接三項間漸化式 という。

定数数列と漸化式

数列 $\{a_n\}$ の漸化式

$$a_1 = a, a_{n+1} = a_n$$

について、数列 $\{a_n\}$ は定数数列であるから

$$a_n = a$$

⑨ 補 数列 $\{a_n\}$ は公差が 0 の等差数列、あるいは公比が 1 の等比数列と考えてもよい。

$$a_1 = a_2 = a_3 = \dots = a_n \text{ となる。}$$

⑩ 例 数列 $\{a_n\}$ の漸化式 $a_1 = 2, a_{n+1} = a_n (n = 1, 2, 3, \dots)$ を解くと $a_n = 2$

等差数列と漸化式

数列 $\{a_n\}$ の漸化式

$$a_1 = a, a_{n+1} = a_n + d \text{ (} d \text{ は } n \text{ に無関係な定数)}$$

について、数列 $\{a_n\}$ は初項 a 、公差 d の等差数列であるから

$$a_n = a + (n - 1)d$$

$$a_n, \overset{\curvearrowright}{a_{n+1}} \\ +d$$

⑪ 例 数列 $\{a_n\}$ の漸化式 $a_1 = 2, a_{n+1} = a_n + 3 (n = 1, 2, 3, \dots)$ を解くと

$$a_n = 2 + 3(n - 1) = 3n - 1$$

等比数列と漸化式

数列 $\{a_n\}$ の漸化式

$$a_1 = a, a_{n+1} = r a_n \quad (r \text{ は } n \text{ に無関係な定数})$$

について、数列 $\{a_n\}$ は初項 a 、公比 r の等比数列であるから

$$a_n = a r^{n-1}$$

$$a_n, a_{n+1}$$

$\xrightarrow{\quad}$
 $\times r$

① 数列 $\{a_n\}$ の漸化式 $a_1 = 2, a_{n+1} = 5a_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$ を解くと

$$a_n = 2 \cdot 5^{n-1}$$

等比数列の漸化式の等式変形

数列 $\{A_n\}$ の漸化式

$$A_{n+1} = r A_n \quad (r \text{ は } n \text{ に無関係な定数}) \quad \text{ただし } n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

について、これをくり返して

$$A_n = r A_{n-1} \quad (n \geq 1)$$

$$= r^2 A_{n-2} \quad (n \geq 2)$$

$$= r^3 A_{n-3} \quad (n \geq 3)$$

⋮

$$= r^{n-3} A_3 \quad (n \geq 3)$$

$$= r^{n-2} A_2 \quad (n \geq 2)$$

$$= r^{n-1} A_1 \quad (n \geq 1)$$

$$= r^n A_0 \quad (n \geq 0)$$

つまり $A_n = r^{\circ} A_{\square}$ (たしたら n)
 $(\circ + \square = n)$

階差数列と漸化式

数列 $\{a_n\}$ の漸化式

$$a_1 = a, \quad a_{n+1} - a_n = b_n$$

について、数列 $\{b_n\}$ は数列 $\{a_n\}$ の階差数列であるから

$$n \geq 2 \text{ のとき } a_n = a + \sum_{k=1}^{n-1} b_k$$

⑨ 数列 $\{b_n\}$ が定数数列ならば、数列 $\{a_n\}$ は等差数列になる。

⑩ 数列 $\{a_n\}$ の漸化式 $a_1 = 1, a_{n+1} = a_n + 2^n$ を解くと

$$n \geq 2 \text{ のとき } a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} 2^k = 1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{n-1} = 2^n - 1$$

これは $n = 1$ のときも成り立つ。

$$\text{よって } a_n = 2^n - 1$$

$$\text{漸化式 } a_{n+1} = pa_n + q$$

数列 $\{a_n\}$ の漸化式

$$a_1 = a, a_{n+1} = pa_n + q \quad (p, q \text{ は } n \text{ に無関係な定数})$$

について

① $p = 1$ のとき

$$a_1 = a, a_{n+1} = a_n + q$$

数列 $\{a_n\}$ は初項 a , 公差 q の等差数列であるから

$$a_n = a + (n-1)q$$

② $p \neq 1$ のとき

$$a_{n+1} = pa_n + q \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\alpha = p\alpha + q \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

① - ② として $a_{n+1} - \alpha = p(a_n - \alpha)$ ただし ② から $\alpha = \frac{q}{1-p}$

数列 $\{a_n - \alpha\}$ は初項 $a_1 - \alpha$, 公比 p の等比数列であるから

$$a_n - \alpha = (a_1 - \alpha)p^{n-1}$$

$$\text{よって } a_n = (a_1 - \alpha)p^{n-1} + \alpha$$

補 ② $\alpha = \frac{q}{1-p}$ として変形すると

$$a_{n+1} - \frac{q}{1-p} = p\left(a_n - \frac{q}{1-p}\right)$$

数列 $\left\{a_n - \frac{q}{1-p}\right\}$ は初項 $a_1 - \frac{q}{1-p} = a - \frac{q}{1-p}$, 公比 p の等比数列であるから

$$a_n - \frac{q}{1-p} = \left(1 - \frac{q}{1-p}\right)p^{n-1}$$

$$\text{よって } a_n = \left(1 - \frac{q}{1-p}\right)p^{n-1} + \frac{q}{1-p}$$

例 ② 数列 $\{a_n\}$ の漸化式 $a_1 = 3, a_{n+1} = 3a_n - 2$ を解くと

$$a_{n+1} = 3a_n - 2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\alpha = 3\alpha - 2 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

① - ② として $a_{n+1} - \alpha = 3(a_n - \alpha)$ ただし ② から $\alpha = 1$

$$\text{変形して } a_{n+1} - 1 = 3(a_n - 1)$$

数列 $\{a_n - 1\}$ は初項 $a_1 - 1 = 3 - 1 = 2$, 公比 3 の等比数列であるから

$$a_n - 1 = 2 \cdot 3^{n-1}$$

$$\text{よって } a_n = 2 \cdot 3^{n-1} + 1$$

漸化式 $a_{n+1} = pa_n + (n \text{ の } 1 \text{ 次式})$

数列 $\{a_n\}$ の漸化式

$$a_1 = a, a_{n+1} = pa_n + qn + r \quad (p, q, r \text{ は } n \text{ に無関係な定数, } q \neq 0)$$

について

① $p = 1$ のとき

$$a_1 = a, a_{n+1} - a_n = qn + r$$

数列 $\{a_n\}$ の階差数列が $\{qn + r\}$ であるから

$$n \geq 2 \text{ のとき } a_n = a + \sum_{k=1}^{n-1} (qk + r)$$

② $p \neq 1$ のとき

$$a_{n+1} = pa_n + qn + r \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$g(n+1) = pg(n) + qn + r \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

② が n の恒等式となる 1 次式 $g(n) = \alpha n + \beta$ を求める.

$$\textcircled{1} - \textcircled{2} \text{ として } a_{n+1} - g(n+1) = p\{a_n - g(n)\}$$

数列 $\{a_n - g(n)\}$ は初項 $a_1 - g(1)$, 公比 p の等比数列であるから

$$a_n - g(n) = \{a_1 - g(1)\} \cdot p^{n-1}$$

$$\text{よって } a_n = \{a_1 - g(1)\} \cdot p^{n-1} + g(n)$$

③ $a_{n+1} = pa_n + qn + r \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$

① の n を $n+1$ として

$$a_{n+2} = pa_{n+1} + q(n+1) + r \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{2} - \textcircled{1} \text{ として } a_{n+2} - a_{n+1} = p(a_{n+1} - a_n) + q$$

$$a_{n+1} - a_n = b_n \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

$$\text{とおくと } b_{n+1} = pb_n + q$$

この漸化式を解いて 数列 $\{b_n\}$ の一般項を求める.

求めた数列 $\{b_n\}$ と ① を ③ へ代入すると 数列 $\{a_n\}$ の一般項は求まる.

② 等比数列の漸化式へ変形

③ 階差を利用する

③ ③ から数列 $\{a_n\}$ の階差数列が数列 $\{b_n\}$ であることから数列 $\{a_n\}$ は求まる.

漸化式 $a_{n+1} = pa_n + (n \text{ の整式})$

$f(n)$ は m 次の整式とする.

数列 $\{a_n\}$ の漸化式

$$a_1 = a, a_{n+1} = pa_n + f(n) \quad (p \text{ は } n \text{ に無関係な定数})$$

について

① $p = 1$ のとき

$$a_1 = a, a_{n+1} - a_n = f(n)$$

数列 $\{a_n\}$ の階差数列が $\{f(n)\}$ であるから

$$n \geq 2 \text{ のとき } a_n = a + \sum_{k=1}^{n-1} f(k)$$

② $p \neq 1$ のとき

$$a_{n+1} = pa_n + f(n) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$g(n+1) = pg(n) + f(n) \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

② が n の恒等式となる m 次式 $g(n)$ を求める.

$$\textcircled{1} - \textcircled{2} \text{ として } a_{n+1} - g(n+1) = p\{a_n - g(n)\}$$

数列 $\{a_n - g(n)\}$ は初項 $a_1 - g(1)$, 公比 p の等比数列であるから

$$a_n - g(n) = \{a_1 - g(1)\} \cdot p^{n-1}$$

$$\text{よって } a_n = \{a_1 - g(1)\} \cdot p^{n-1} + g(n)$$

③ $a_{n+1} = pa_n + f(n) \quad \dots\dots \textcircled{1}$

① の n を $n+1$ として

$$a_{n+2} = pa_{n+1} + f(n+1) \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{2} - \textcircled{1} \text{ として } a_{n+2} - a_{n+1} = p(a_{n+1} - a_n) + f(n+1) - f(n)$$

ここで $f(n+1) - f(n)$ は $(m-1)$ 次式

$$a_{n+1} - a_n = b_n \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

$$\text{とおくと } b_{n+1} = pb_n + f(n+1) - f(n)$$

この漸化式を解いて 数列 $\{b_n\}$ の一般項を求める.

求めた数列 $\{b_n\}$ と ① を ③ へ代入すると 数列 $\{a_n\}$ の一般項は求まる.

② 等比数列の漸化式へ変形

③ 階差を $(m-1)$ 回利用

$$\boxed{\text{漸化式 } a_{n+1} = pa_n + q^n}$$

数列 $\{a_n\}$ の漸化式

$$a_1 = a, a_{n+1} = pa_n + q^n \quad (p, q \text{ は } n \text{ に無関係な定数, } p \neq 0, q \neq 0)$$

について

① $p = 1$ のとき

$$a_1 = a, a_{n+1} - a_n = q^n$$

数列 $\{a_n\}$ の階差数列が数列 $\{q^n\}$ であるから

$$n \geq 2 \text{ のとき } a_n = a + \sum_{k=1}^{n-1} q^k$$

② $p \neq 1$ のとき

$$a_{n+1} = pa_n + q^n \dots\dots \textcircled{1}$$

$$g(n+1) = pg(n) + q^n \dots\dots \textcircled{2}$$

② が n の恒等式となる $g(n) = (\alpha n + \beta) \cdot q^n$ を求める.

$$\textcircled{1} - \textcircled{2} \text{ として } a_{n+1} - g(n+1) = p \{a_n - g(n)\}$$

数列 $\{a_n - g(n)\}$ は初項 $a_1 - g(1)$, 公比 p の等比数列であるから

$$a_n - g(n) = \{a_1 - g(1)\} \cdot p^{n-1}$$

$$\text{よって } a_n = \{a_1 - g(1)\} \cdot p^{n-1} + g(n)$$

③ 両辺 q^{n+1} で割り

$$\frac{a_{n+1}}{q^{n+1}} = \frac{p}{q} \cdot \frac{a_n}{q^n} + \frac{1}{q}$$

$$\frac{a_n}{q^n} = b_n \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\text{とおき } b_{n+1} = \frac{p}{q} b_n + \frac{1}{q}$$

数列 $\{b_n\}$ の一般項を求め, ① から数列 $\{a_n\}$ の一般項が求まる.

④ 両辺 p^{n+1} で割り

$$\frac{a_{n+1}}{p^{n+1}} = \frac{a_n}{p^n} + \frac{1}{p} \cdot \left(\frac{q}{p}\right)^n$$

$$\frac{a_n}{p^n} = b_n \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\text{とおき } b_{n+1} - b_n = \frac{1}{p} \cdot \left(\frac{q}{p}\right)^n$$

数列 $\{b_n\}$ の一般項を求め, ① から数列 $\{a_n\}$ の一般項が求まる.

$$\text{漸化式 } a_{n+1} = \frac{pa_n}{qa_n + r}$$

数列 $\{a_n\}$ の漸化式

$$a_1 = a, a_{n+1} = \frac{pa_n}{qa_n + r} \quad (p, q, r \text{ は } 0 \text{ 以外の } n \text{ に無関係な定数})$$

について

① $a = 0$ のとき

$$a_1 = 0, a_{n+1} = \frac{pa_n}{qa_n + r}$$

よって $a_n = 0$

② $a \neq 0$ のとき

帰納的に任意の自然数 n に対して $a_n \neq 0$

$$\text{両辺逆数をと} \quad \frac{1}{a_{n+1}} = \frac{qa_n + r}{pa_n}$$

$$\text{すなわち } \frac{1}{a_{n+1}} = \frac{r}{p} \cdot \frac{1}{a_n} + \frac{q}{p}$$

$$\frac{1}{a_n} = b_n \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\text{とおくと } b_{n+1} = \frac{r}{p}b_n + \frac{q}{p}$$

数列 $\{b_n\}$ の一般項を求め、① から数列 $\{a_n\}$ の一般項が求まる。

例 漸化式 $a_1 = 4, a_{n+1} = \frac{4a_n}{a_n + 8}$ を解く

$a_1 = 4 > 0$ であるから帰納的にすべての自然数 n に対して $a_n > 0$

$$\text{両辺逆数をと} \quad \frac{1}{a_{n+1}} = \frac{a_n + 8}{4a_n} \quad \text{すなわち } \frac{1}{a_{n+1}} = 2 \cdot \frac{1}{a_n} + \frac{1}{4}$$

$$b_n = \frac{1}{a_n} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\text{とおくと } b_1 = \frac{1}{a_1} = \frac{1}{4}$$

$$b_{n+1} = 2b_n + \frac{1}{4}$$

$$\text{変形して } b_{n+1} + \frac{1}{4} = 2\left(b_n + \frac{1}{4}\right)$$

数列 $\left\{b_n + \frac{1}{4}\right\}$ は初項 $b_1 + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$, 公比 2 の等比数列であるから

$$b_n + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot 2^{n-1} \quad \text{すなわち } b_n = \frac{2^n - 1}{4}$$

$$\text{よって } \textcircled{1} \text{ から } a_n = \frac{4}{2^n - 1}$$

漸化式 $a_{n+1} = f(n)a_n$

数列 $\{a_n\}$ の漸化式

$$a_1 = a, a_{n+1} = f(n)a_n \quad \text{ただし } f(n) \text{ は定数ではない}$$

について

① $n \geq 2$ のとき

$$\text{繰り返し変形して } a_n = f(n-1)f(n-2) \cdots f(1)a_1$$

② 両辺を $(n+1)!$ で割り

$$\frac{a_{n+1}}{(n+1)!} = \frac{f(n)}{n+1} \cdot \frac{a_n}{n!}$$

$\left\{ \frac{a_n}{n!} \right\}$ についての漸化式を考える.

③ 任意の自然数 n に対して $a_n > 0, f(n) > 0$ であるならば
底が c の対数をとる

$$\log_c a_{n+1} = \log_c f(n) + \log_c a_n$$

$$\log_c a_n = b_n \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$\text{とおくと } b_1 = \log_c a_1 = \log_c a, b_{n+1} = b_n + \log_c f(n)$$

数列 $\{b_n\}$ の階差数列が $\{\log_c f(n)\}$ である.

数列 $\{b_n\}$ の一般項を求め、 $\textcircled{1}$ から数列 $\{a_n\}$ の一般項は求まる.

補 ① の求め方が定石だが、問題によっては ②, ③ の解法も頭に入れておくとよい.

注 数列 $\{a_n\}$ は公比 $f(n)$ の等比数列としないように.

例 漸化式 $a_1 = 1, a_{n+1} = (n+1)a_n$ を解く.

① $n \geq 2$ のとき 繰り返し変形して

$$\begin{aligned} a_n &= n a_{n-1} \\ &= n(n-1) a_{n-2} \\ &\quad \vdots \\ &= n(n-1) \cdots 2 \cdot 1 \cdot a_1 \\ &= n! \end{aligned}$$

これは $n = 1$ のときも成り立つ.

よって $a_n = n!$

② 両辺を $(n+1)!$ で割ると $\frac{a_{n+1}}{(n+1)!} = \frac{a_n}{n!}$

$$\left\{ \frac{a_n}{n!} \right\} \text{ は定数数列であるから } \frac{a_n}{n!} = \frac{a_1}{1!} = 1$$

よって $a_n = n!$

漸化式 $a_{n+2} + p a_{n+1} + q a_n = 0$ を解く手順

数列 $\{a_n\}$ の漸化式

$$a_1 = a, a_2 = b, a_{n+2} + p a_{n+1} + q a_n = 0$$

(p, q は 0 でない n に無関係な定数)

について、数列 $\{a_n\}$ の一般項を求める次のような手順がある。

① 2 次方程式 $x^2 + p x + q = 0$ の解 $x = \alpha, \beta$ (重解は $\alpha = \beta$) を求める。

$$\textcircled{2} \begin{cases} a_{n+2} - \alpha a_{n+1} = \beta (a_{n+1} - \alpha a_n) & \cdots \cdots \textcircled{1} \\ a_{n+2} - \beta a_{n+1} = \alpha (a_{n+1} - \beta a_n) & \cdots \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

と変形する。(重解は ① と ② が同じ式)

$$\textcircled{3} \textcircled{1} \text{ において } a_{n+1} - \alpha a_n = b_n \cdots \cdots \textcircled{3}$$

とおくと $b_{n+1} = \beta b_n$

数列 $\{b_n\}$ は初項 $b_1 = a_2 - \alpha a_1 = b - \alpha a$, 公比 β の等比数列であるから

$$b_n = (b - \alpha a) \beta^{n-1}$$

$$\textcircled{2} \text{ において } a_{n+1} - \beta a_n = c_n \cdots \cdots \textcircled{4}$$

とおくと $c_{n+1} = \alpha c_n$

数列 $\{c_n\}$ は初項 $c_1 = a_2 - \beta a_1 = b - \beta a$, 公比 α の等比数列であるから

$$c_n = (b - \beta a) \alpha^{n-1}$$

$$\textcircled{4} \textcircled{3} - \textcircled{4} \text{ として } (\beta - \alpha) a_n = b_n - c_n$$

$$\alpha \neq \beta \text{ ならば } a_n = \frac{b_n - c_n}{\beta - \alpha} = \frac{(b - \alpha a) \beta^{n-1} - (b - \beta a) \alpha^{n-1}}{\beta - \alpha}$$

③, ④ のいずれか一方からも数列 $\{a_n\}$ の一般項は求まる。

①, ② は $a_{n+2} - (\alpha + \beta) a_{n+1} + \alpha \beta a_n = 0$

変形するには $\alpha + \beta = -p, \alpha \beta = q$ であることが必要で、

α, β が解となる 2 次方程式の 1 つが $x^2 + p x + q = 0$

① 重解のときは ③ の隣接二項間漸化式を解けばよい。

連立漸化式

2つの数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ の漸化式

$$a_1 = a, b_1 = b, \begin{cases} a_{n+1} = p a_n + q b_n & \dots\dots ① \\ b_{n+1} = r a_n + s b_n & \dots\dots ② \end{cases}$$

(a, b, p, q, r, s は n に無関係な定数で $(a, b) \neq (0, 0)$, $(p - s)^2 + 4qr > 0$, $r \neq 0$)

について、2つの数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ の一般項を求める次のような手順がある。

① ① + ② $\times \alpha$ として $a_{n+1} + \alpha b_{n+1} = (p + r\alpha)a_n + (q + s\alpha)b_n \dots\dots ③$

② 数列 $\{a_n + \alpha b_n\}$ が公比 $(p + r\alpha)$ の等比数列になるような α を求める。

つまり

$$\begin{aligned} a_{n+1} + \alpha b_{n+1} &= (p + r\alpha)(a_n + \alpha b_n) \dots\dots ④ \\ &= (p + r\alpha)a_n + (p\alpha + r\alpha^2)b_n \dots\dots ⑤ \end{aligned}$$

を満たす α を求める。

③ と ⑤ の (右辺) の b_n の係数が等しいので $q + s\alpha = p\alpha + r\alpha^2$

すなわち $r\alpha^2 + (p - s)\alpha - q = 0$ を満たす α を求める。

③ ② で求めた 2つの α に対し ④ を考える。

それぞれ数列 $\{a_n + \alpha b_n\}$ が公比 $(p + r\alpha)$ の等比数列であることから、

2つの関係式を作り 2つの数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ の一般項は求まる。

⑨ $p = s$ かつ $q = r$ ならば $\alpha = \pm 1$ となり、対称性のある連立漸化式 になる。

⑨ 連立漸化式から b_n を消して、数列 $\{a_n\}$ の 隣接三項間漸化式 に帰着することもできる。

⑩ 行列からも求まる。

対称性のある連立漸化式

2つの数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ の漸化式

$$a_1 = a, b_1 = b, \begin{cases} a_{n+1} = p a_n + q b_n & \dots\dots ① \\ b_{n+1} = q a_n + p b_n & \dots\dots ② \end{cases}$$

(a, b, p, q は n に無関係な定数で $(a, b) \neq (0, 0)$, $q \neq 0$)

について、2つの数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ の一般項を求める次のような手順がある。

① ① + ② として $a_{n+1} + b_{n+1} = (p + q)(a_n + b_n) \dots\dots ③$

① - ② として $a_{n+1} - b_{n+1} = (p - q)(a_n - b_n) \dots\dots ④$

② ③ から数列 $\{a_n + b_n\}$ は初項 $a_1 + b_1 = a + b$, 公比 $p + q$ の等比数列

④ から数列 $\{a_n - b_n\}$ は初項 $a_1 - b_1 = a - b$, 公比 $p - q$ の等比数列

すなわち

$$\begin{cases} a_n + b_n = (a + b)(p + q)^{n-1} & \dots\dots ⑤ \\ a_n - b_n = (a - b)(p - q)^{n-1} & \dots\dots ⑥ \end{cases}$$

③ $\frac{⑤ + ⑥}{2}$ として $a_n = \frac{(a + b)(p + q)^{n-1} + (a - b)(p - q)^{n-1}}{2}$

$\frac{⑤ - ⑥}{2}$ として $b_n = \frac{(a + b)(p + q)^{n-1} - (a - b)(p - q)^{n-1}}{2}$

補 連立漸化式 $\begin{cases} a_{n+1} = p a_n + q b_n & \dots\dots ① \\ b_{n+1} = r a_n + s b_n & \dots\dots ② \end{cases}$

は $p = s$ かつ $q = r$ ならば 2 式の和 ① + ②, 差 ① - ② を計算するとよい。

例 2つの数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ の漸化式

$$a_1 = 2, b_1 = 1, \begin{cases} a_{n+1} = 2a_n + b_n & \dots\dots ① \\ b_{n+1} = a_n + 2b_n & \dots\dots ② \end{cases}$$

① + ② として $a_{n+1} + b_{n+1} = 3(a_n + b_n) \dots\dots ③$

① - ② として $a_{n+1} - b_{n+1} = a_n - b_n \dots\dots ④$

③ から数列 $\{a_n + b_n\}$ は初項 $a_1 + b_1 = 3$, 公比 3 の等比数列

④ から数列 $\{a_n - b_n\}$ は初項 $a_1 - b_1 = 1$, 公比 1 の等比数列 (定数数列)

すなわち

$$\begin{cases} a_n + b_n = 3^n & \dots\dots ⑤ \\ a_n - b_n = 1 & \dots\dots ⑥ \end{cases}$$

$\frac{⑤ + ⑥}{2}$ として $a_n = \frac{3^n + 1}{2}$

$\frac{⑤ - ⑥}{2}$ として $b_n = \frac{3^n - 1}{2}$

数学的帰納法

すべての自然数 n に対して

命題 $P(n)$ が成り立つ ……①

ことを証明するのに

(I) 出発点が成り立つ

(II) 次から次へと成り立つ

という 2 つの (I), (II) を示すことで ① が証明される方法がある.

この証明法を すうがくてききのうほう 数学的帰納法 という.

④ (I), (II) はどちらから示してもよい.

④ (I), (II) の具体例に次がある.

① (I) $n = 1$ のとき, ① は成り立つ.

(II) $n = k$ ($k = 1, 2, \dots$) のとき ① が成り立つとする仮定すると,
 $n = k + 1$ のときも ① が成り立つ.

② (I) $n = 1, 2$ のとき, ① は成り立つ.

(II) $n = k, k + 1$ ($k = 1, 2, \dots$) のとき ① が成り立つとする仮定すると,
 $n = k + 2$ のときも ① が成り立つ.

③ (I) $n = 1$ のとき, ① は成り立つ.

(II) $n = 1, 2, \dots, m$ ($m = 1, 2, \dots$) のとき ① が成り立つとする仮定すると,
 $n = m + 1$ のときも ① が成り立つ.

④ ① 「今日が元旦ならば翌日も元旦とする」という法律ができたとする,
1月1日は元旦なので, その日から毎日が元旦になる.