数学 II　指数関数

~高校数学のまとめ~

教科書をもとに定義や定理を独自にパネル形式でまとめています．
何度も書き直し，加筆修正を繰り返しており，完成したものではありません．
人によっては不要な部分もあるでしょう．そういうときは読み飛ばしてください．

累乗と指数

0 でない文字 a をいくつかかけたものを a の累乗（るいじょう）という.

a を n 回かけた累乗を a の n 乗といい a^n とかく.

すなわち

$$\underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{n\text{個}} = a^n \quad \text{または} \quad \underbrace{a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_{n\text{個}} = a^n$$

a^n と表したとき，a を底（てい），n を指数（しすう）という.

指数が 1 のときは $a^1 = a$ と 1 は省略できる.

指数が 0 のときは $a^0 = 1$ と定義する.

例　$a \times a = a^2$,　　$a \times a \times a = a^3$

指数が整数の指数法則

a，b を 0 でない実数，m，n は正の整数とするとき，次が成り立つ.

1. $a^m a^n = a^{m+n}$
2. $a^m \div a^n = \dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
3. $(a^m)^n = a^{mn} = (a^n)^m$
4. $(ab)^n = a^n b^n$
5. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$

例
1. $a^2 a^3 = a^{2+3} = a^5$
2. $a^5 \div a^2 = \dfrac{a^5}{a^2} = a^{5-2} = a^3$
3. $(a^3)^2 = a^{3\times 2} = (a^2)^3 = a^6$
4. $(ab)^2 = a^2 b^2$
5. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^2 = \dfrac{a^2}{b^2}$

累乗根

n を正の整数とする.

n 乗して a になる数, すなわち $x^n = a$ となる数 x を a の n 乗根（じょうこん）といい,

2 乗根 (平方根), 3 乗根 (立方根), 4 乗根 , ⋯ を総称して a の 累乗根（るいじょうこん）という.

$a > 0$ のとき a の n 乗根で正となるものがただ 1 つあり, それを $\sqrt[n]{a}$ で表す.

とくに $\sqrt[2]{a}$ は $\sqrt{a}$ と 2 は省略して表す.

また 0 の累乗根は 0 だけであり $\sqrt[n]{0} = 0$

$\boxed{1}$ n が偶数の場合

$a > 0$ のとき a の n 乗根は正と負の 2 つあり

正の方を $\sqrt[n]{a}$, 負の方を $-\sqrt[n]{a}$ で表す.

$a < 0$ のとき 実数の範囲に a の n 乗根は存在しない .

$\boxed{2}$ n が奇数の場合

a の n 乗根はただ 1 つであり $\sqrt[n]{a}$ と表す.

$a < 0$ のとき $\sqrt[n]{a} = -\sqrt[n]{-a}$ と変形できる.

例 $\boxed{1}$ 16 の 4 乗根は, 2 と -2 の 2 つあり

正の方は $2 = \sqrt[4]{16}$, 負の方は $-2 = -\sqrt[4]{16}$

$\boxed{2}$ -8 の 3 乗根は -2 のただ 1 つであり

$-2 = \sqrt[3]{-8} = -\sqrt[3]{8}$

累乗根の基本性質

$a>0$，n を正の整数とするとき，次が成り立つ．

$\boxed{1}$ $\sqrt[n]{a}=a^{\frac{1}{n}}$ 　とくに $\sqrt{a}=a^{\frac{1}{2}}$

$\boxed{2}$ $\sqrt[n]{a}>0$

$\boxed{3}$ $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n=a$

$\boxed{4}$ $\left(\sqrt[n]{a^n}\right)=a$

累乗根の性質

$a>0$，$b>0$，m，n，p を正の整数とするとき，次が成り立つ．

$\boxed{1}$ $\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$

$\boxed{2}$ $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$

$\boxed{3}$ $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m=\sqrt[n]{a^m}$

$\boxed{4}$ $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a}$

$\boxed{5}$ $\sqrt[n]{a^m}=\sqrt[np]{a^{mp}}$

指数が有理数の累乗

$a>0$ で，m，n は正の整数，r が正の有理数とするとき

$\boxed{1}$ $a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$

$\boxed{2}$ $a^{-r}=\dfrac{1}{a^r}$

補 $\boxed{1}$ について m，n を互いに素とするとき，n が奇数ならば $a<0$ としても計算できる．

$(-8)^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{(-8)}=-2$

指数が有理数の指数法則

$a>0$，$b>0$ で，p，q は有理数とするとき，次が成り立つ．

1. $a^p a^q = a^{p+q}$
2. $a^p \div a^q = \dfrac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$
3. $(a^p)^q = a^{pq} = (a^q)^p$
4. $(ab)^p = a^p b^p$
5. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^p = \dfrac{a^p}{b^p}$

無理数の指数

$a>0$，s を無理数とするとき a^s を次のように定義する．

s を小数で表し，小数第 n 位までの値の有理数の数列を $\{x_n\}$ $(n=1,2,3,\cdots)$ として

$$a^s = a^{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}$$

㊟ $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ とは n を限りなく大きくしたときに $\{x_n\}$ が近づいていく値のこと．

㊄ $3^{\sqrt{2}}$ について考える．

$\sqrt{2}$ を小数で表すと $\sqrt{2}=1.4142\cdots$

この小数第 n 位までの値の有理数列 $\{x_n\}$ は

$$\begin{aligned} x_1 &= 1.4 \\ x_2 &= 1.41 \\ x_3 &= 1.414 \\ x_4 &= 1.4142 \\ &\ \vdots \end{aligned}$$

これは一定の値に近づく．

このことから $3^{\sqrt{2}} = 3^{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}$ と定義します．

この定義より 指数が有理数の指数法則 は指数が実数でも成り立つことになります．

そして 指数関数 が定義できることにもなります．

指数関数

a は $0 < a < 1,\ 1 < a$ をみたす定数とする．

$$y = a^x$$

と表される関数を a を **底**（てい）とする x の **指数関数**（しすうかんすう）という．

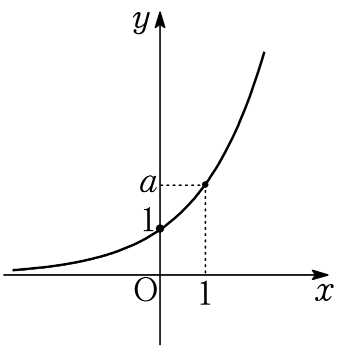
指数関数のグラフ

座標平面で

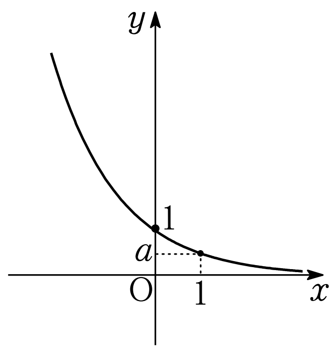
$$y = a^x\ (0 < a < 1,\ 1 < a)$$

のグラフは次のような概形になる．

〔$a > 1$ のとき〕



〔$0 < a < 1$ のとき〕



このグラフについて

$\boxed{1}$　定点 $(0,\ 1)$ を通る

$\boxed{2}$　漸近線は $y = 0$（x 軸）

$\boxed{3}$　定義域は実数全体，値域は $y > 0$

$\boxed{4}$　$a > 1$ のとき x の値が増加すると y の値も増加する．

$\boxed{5}$　$0 < a < 1$ のとき x の値が増加すると y の値は減少する．

指数方程式・指数不等式

$0 < a < 1$，$1 < a$，X，Y を実数として，次が成り立つ．

$\boxed{1}$ $a^X = a^Y \iff X = Y$

$\boxed{2}$ $a > 1$ のとき　$a^X < a^Y \iff X < Y$（不等号の向きが同じ）

$\boxed{3}$ $0 < a < 1$ のとき　$a^X < a^Y \iff X > Y$（不等号の向きが反対）

㊫ $y = a^x$ のグラフを考える．