数学Ａ　図形の性質「平面図形」

~高校数学のまとめ~

教科書をもとに定義や定理を独自にパネル形式でまとめています．
何度も書き直し，加筆修正を繰り返しており，完成したものではありません．
人によっては不要な部分もあるでしょう．そういうときは読み飛ばしてください．

線分の内分点

m, n を正の数とする.

点 P が線分 AB 上にあって AP : PB = $m : n$ のとき

点 P は線分 AB を $m : n$ に 内分（ないぶん）する という.

とくに 点 M が線分 AB を 1 : 1 に内分する点とすると

点 M は線分 AB の 中点（ちゅうてん） という.

線分の外分点

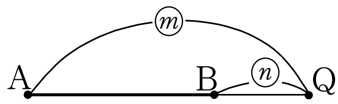
m, n を正の数とする.

点 Q が線分 AB の延長上にあって

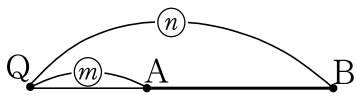
AQ : QB = $m : n$ のとき

点 Q は線分 AB を $m : n$ に 外分（がいぶん）する という.

〔$m > n$ のとき〕



〔$m < n$ のとき〕



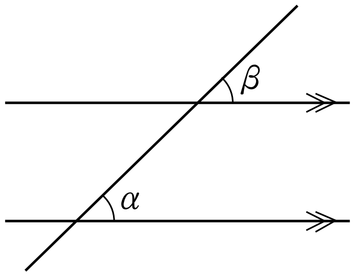
同位角

右図のように

平行な 2 直線とそれらに交わる直線があるとき

$$\alpha = \beta$$

どういかく
これを 同位角は等しい という.



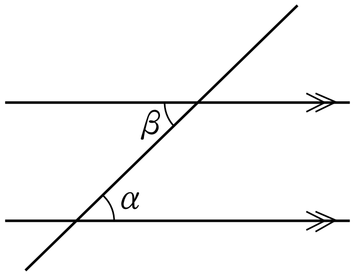
錯角

右図のように

平行な 2 直線とそれらに交わる直線があるとき

$$\alpha = \beta$$

さっかく
これを 錯角は等しい という.



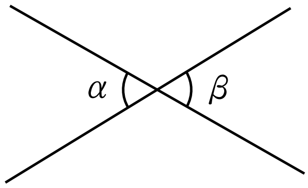
対頂角

右図のように

交わる直線があるとき

$$\alpha = \beta$$

たいちょうかく
これを 対頂角は等しい という.



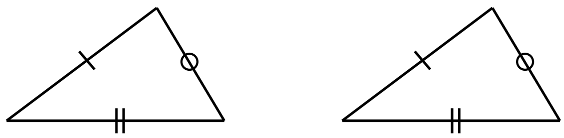
合同を表す記号

$\triangle$ABC と $\triangle$DEF が 合同（ごうどう） のとき $\triangle \mathrm{ABC} \equiv \triangle \mathrm{DEF}$ と表す.

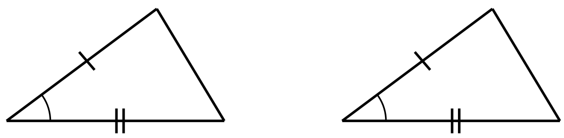
三角形の合同条件

三角形が合同になる条件は次である.

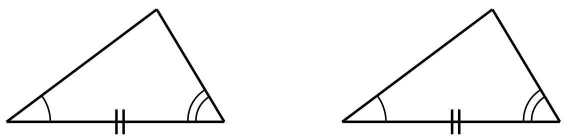
1 3 辺がそれぞれ等しい



2 2 辺とその間の角がそれぞれ等しい



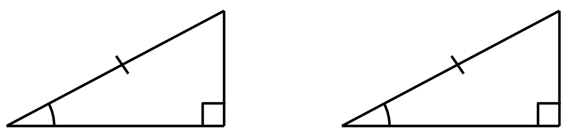
3 1 辺とその両端の角がそれぞれ等しい



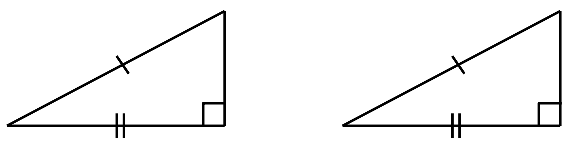
直角三角形の合同条件

直角三角形が合同になる条件は次である.

1 斜辺と 1 つの鋭角が それぞれ等しい



2 斜辺とほかの 1 辺がそれぞれ等しい



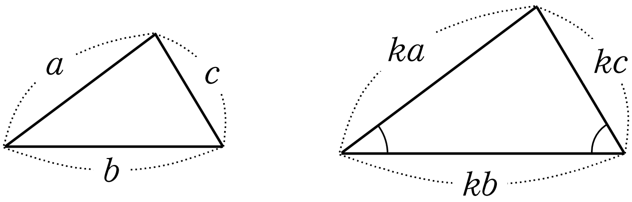
相似を表す記号

$\triangle$ABC と $\triangle$DEF が 相似（そうじ） のとき $\triangle\mathrm{ABC} \backsim \triangle\mathrm{DEF}$ と表す.

三角形の相似条件

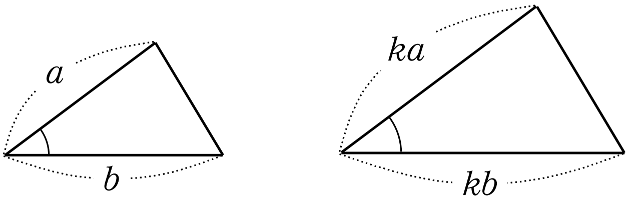
三角形が相似になる条件は次である.

$\boxed{1}$ 3 辺の辺の比が すべて等しい



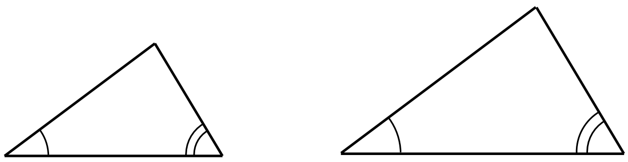
← 相似比 1 : k

$\boxed{2}$ 2 辺の辺の比とその間の角がそれぞれ等しい



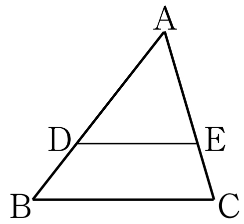
← 相似比 1 : k

$\boxed{3}$ 2 組の角がそれぞれ等しい



三角形と平行線と比

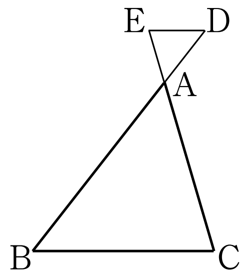
$\triangle$ABC があり，
直線 AB，AC 上にそれぞれ D，E があるとき



$\boxed{1}$ $\mathrm{DE} /\!/ \mathrm{BC} \iff \mathrm{AD} : \mathrm{AB} = \mathrm{AE} : \mathrm{AC}$

$\boxed{2}$ $\mathrm{DE} /\!/ \mathrm{BC} \iff \mathrm{AD} : \mathrm{DB} = \mathrm{AE} : \mathrm{EC}$

$\boxed{3}$ $\mathrm{DE} /\!/ \mathrm{BC} \implies \mathrm{AD} : \mathrm{AB} = \mathrm{DE} : \mathrm{BC}$

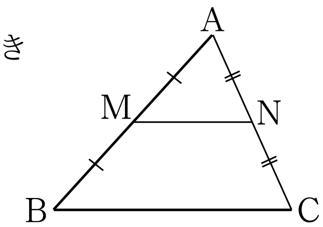


注 $\boxed{3}$ は $\Longleftarrow$ が成り立たない．
考 $\triangle\mathrm{ABC} \backsim \triangle\mathrm{ADE}$ より相似比からわかる．

中線連結定理

$\triangle$ABC の辺 AB，AC の中点をそれぞれ M，N とするとき

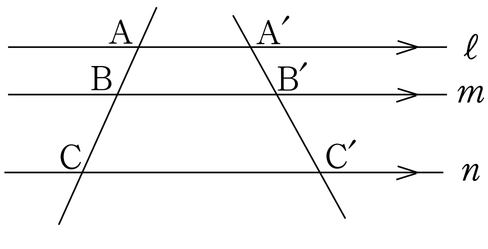
$$\mathrm{MN} /\!/ \mathrm{BC} \text{ かつ } \mathrm{MN} = \frac{1}{2}\mathrm{BC}$$



平行線と比

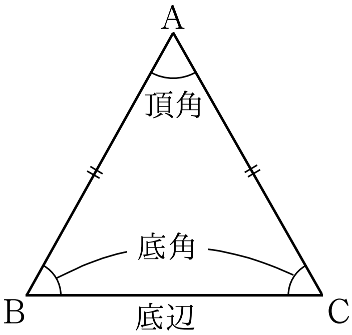
右図のように，平行な 3 直線 ℓ，m，n があり，
その 3 直線と交わる 2 直線があり，交点を
A，B，C，A′，B′，C′ とするとき

$$\mathrm{AB} : \mathrm{BC} = \mathrm{A'B'} : \mathrm{B'C'}$$



二等辺三角形の用語

AB ＝ AC となる二等辺三角形 ABC において



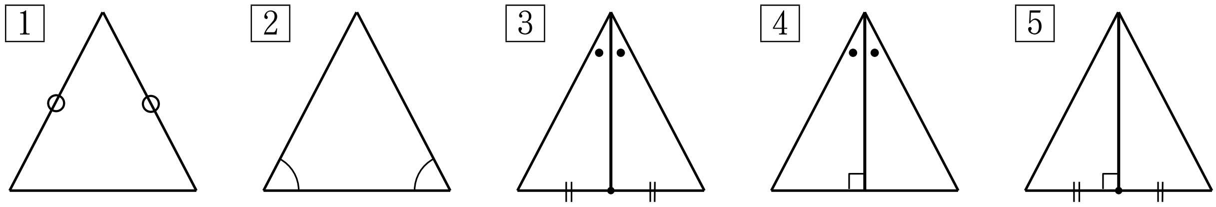
$\boxed{1}$ ∠BAC を **頂角**（ちょうかく）という．

$\boxed{2}$ ∠ABC と ∠ACB を **底角**（ていかく）という．

$\boxed{3}$ 辺 BC を **底辺**（ていへん）という．

二等辺三角形の性質

二等辺三角形は次のような**性質**がある．



$\boxed{1}$ 2 辺の長さが等しい（定義）

$\boxed{2}$ 底角は等しい

$\boxed{3}$ 頂角の二等分線は底辺の中点を通る

$\boxed{4}$ 頂角の二等分線は底辺と垂直に交わる

$\boxed{5}$ 底辺の垂直二等分線は頂点を通る

二等辺三角形の中線

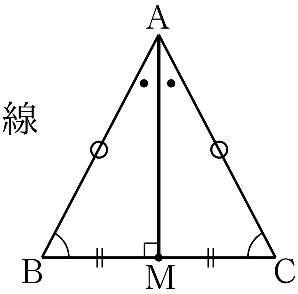
AB ＝ AC となる二等辺三角形 ABC において

辺 BC の中点を M とすると，中線 AM は

∠BAC の二等分線，線分 BC への垂線，線分 BC の垂直二等分線

になっている．

このとき　△ABM ≡ △ACM

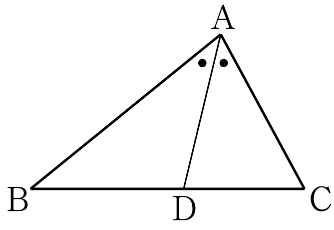


㊒ 頂角の二等分線，頂点から底辺に引いた中線，垂線，底辺の垂直二等分線はすべて一致する．

内角の二等分線と比

$\triangle$ABC の $\angle$A の内角の二等分線と辺 BC との交点を D とすると

点 D は線分 BC を AB : AC に内分する．



すなわち

$$\mathrm{AB} : \mathrm{AC} = \mathrm{BD} : \mathrm{DC}$$

注 逆も成り立つ．

考 （平行線を考える）

あ AB $\geqq$ AC のとき

直線 AD に平行で点 C を通る直線を ℓ とする．

直線 ℓ と直線 BA の交点を E とすると

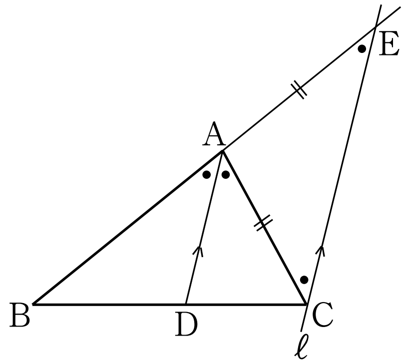
直線 AD と直線 ℓ は平行だから

$\angle$ACE $=$ $\angle$AEC　であるから　AC $=$ AE

AB : AC $=$ AB : AE $=$ BD : DC

い AB $<$ AC　のとき　あ と同様である．

よって，あ，い より示された．



補 AB $=$ AC のとき

$\triangle$ABC は二等辺三角形となり　BD $=$ DC であるから　AB : AC $=$ BD : DC $=$ 1 : 1

外角の二等分線と比

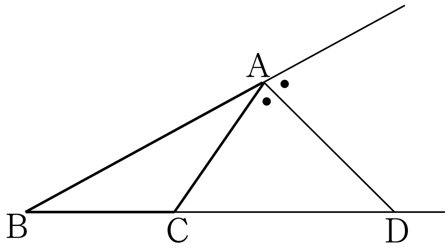
$AB \neq AC$ とする．

$\triangle ABC$ の $\angle A$ の外角の二等分線と辺 BC の延長との交点を D とすると

点 D は線分 BC を $AB : AC$ に外分する．

すなわち

$$AB : AC = BD : DC$$



㊟ 逆も成り立つ．

㊫（平行線を考える）

ⓐ $AB > AC$ のとき

直線 AD に平行で点 C を通る直線を ℓ とする．

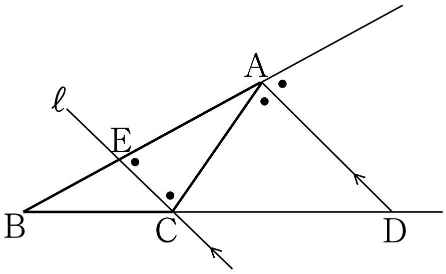
直線 ℓ と直線 BA の交点を E とすると

直線 AD と直線 ℓ は平行である．

$\angle ACE = \angle AEC$ であるから $AC = AE$

$AB : AC = AB : AE = BD : DC$

ⓘ $AB < AC$ のとき ⓐ と同様である．



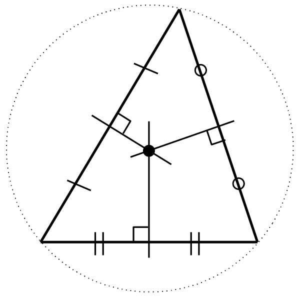
㊥ $AB = AC$ のとき，$\angle A$ の外角の二等分線は辺 BC と平行になり，点 D は存在しない．

三角形の外心

三角形の 3 つの辺の垂直二等分線の交点を

がいしん
三角形の **外心** という.

外心は三角形の外接円の中心である.



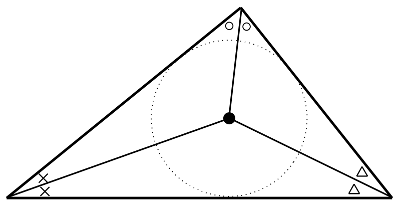
Ⓖ △ABC の外心 O

三角形の内心

三角形の 3 つの内角の二等分線の交点を

ないしん
三角形の **内心** という.

内心は三角形の内接円の中心である.



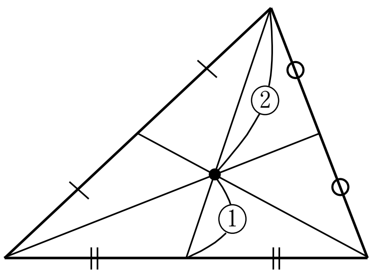
Ⓖ △ABC の内心 I

三角形の重心

三角形の 3 つの**中線**の交点を

じゅうしん
三角形の **重心** という.

重心は各中線を右図のように 2 : 1 に内分する.



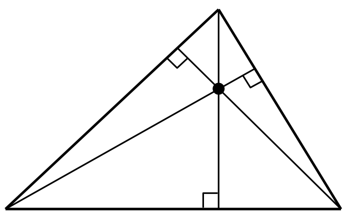
Ⓖ △ABC の重心 G

三角形の垂心

三角形の各頂点から

対辺またはその延長に下ろした 3 本の垂線の交点を

すいしん
三角形の **垂心** という.



Ⓖ △ABC の垂心 H

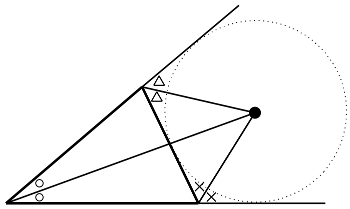
三角形の傍心

三角形の 1 つの内角の二等分線と

他の 2 つの頂点における外角の二等分線の交点を

三角形の 傍心（ぼうしん） という．

傍心は三角形の 1 つの内角に対する傍接円（ぼうせつえん）の中心である．

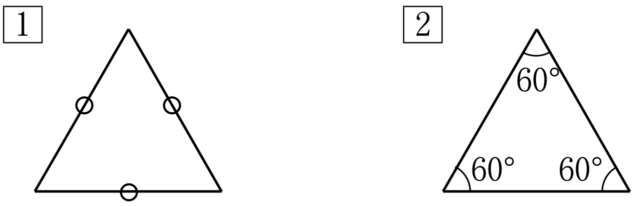


㊓ 傍心は一つの三角形に対して 3 つある．

Ⓖ △ABC の傍心 P_1，P_2，P_3

正三角形の性質

正三角形は次のような性質がある．



1　3 辺の長さが等しい（定義）

2　3 つの内角はすべて 60° で等しい

正三角形と外心，内心，重心，垂心

1　正三角形は外心，内心，重心，垂心のすべてが一致する．

2　外心，内心，重心，垂心のうちの 2 つが一致する三角形は正三角形である．

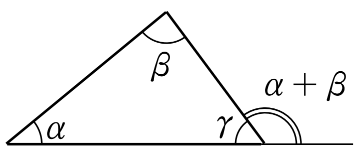
三角形の内角と外角

右図において　$\alpha+\beta+\gamma=180^\circ$

すなわち

1　三角形の内角の和は 180°

2　三角形の外角はそれと隣り合わない 2 つの内角の和に等しい



三角形の 3 辺の長さの関係

三角形 において

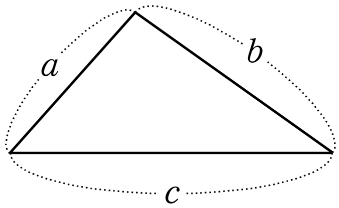
（2 辺の長さの和）＞（他の 1 辺の長さ）

三角形の成立条件

3 つの数 a，b，c を 3 辺の長さとする三角形が存在するための条件は

$a>0$，$b>0$，$c>0$ のもとで

$$\begin{cases} a+b>c \\ b+c>a \\ c+a>b \end{cases} \iff |a-b|<c<a+b$$



すなわち

（2 辺の長さの差）＜（1 辺の長さ）＜（2 辺の長さの和）

とくに c が最大の長さになるとき $a+b>c$ のみでよい．

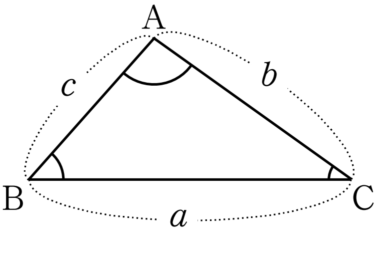
㊟ $|a-b|<c$ ならば $|a-b| \geqq 0$ であることから $c>0$ も成り立つ．

三角形の辺と角の大小関係

$\mathrm{BC}=a$，$\mathrm{CA}=b$，$\mathrm{AB}=c$，$\angle\mathrm{BAC}=A$，$\angle\mathrm{ABC}=B$，$\angle\mathrm{BCA}=C$

となる $\triangle\mathrm{ABC}$ に対して

$$a>b>c \iff A>B>C$$



すなわち

$\boxed{1}$ (長い辺に対する角)>(短い辺に対する角)

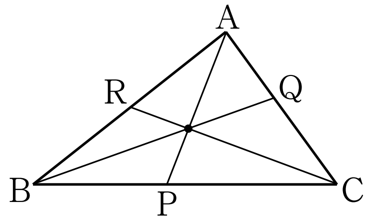
$\boxed{2}$ (大きい角に対する辺)>(小さい角に対する辺)

チェバの定理

$\triangle$ABC において，3 辺 BC，CA，AB 上にそれぞれ点 P，Q，R があり，

3 直線 AP，BQ，CR が 1 点で交わるとき

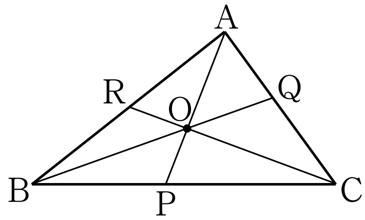
$$\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AR}{RB}=1$$



㊟ 逆も成り立つ．

㊫ 3 直線 AP，BQ，CR が交わる 1 点を O として面積比より

$$\frac{BP}{PC}=\frac{\triangle OAB}{\triangle OAC}$$
$$\frac{CQ}{QA}=\frac{\triangle OBC}{\triangle OBA}$$
$$\frac{AR}{RB}=\frac{\triangle OCA}{\triangle OCB}$$



よって

$$\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AR}{RB}=\frac{\triangle OAB}{\triangle OAC}\cdot\frac{\triangle OBC}{\triangle OAB}\cdot\frac{\triangle OCA}{\triangle OBC}=1$$

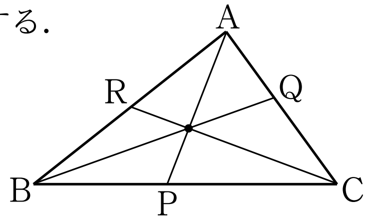
チェバの定理の逆

$\triangle$ABC において，3 辺 BC，CA，AB 上にそれぞれ点 P，Q，R をとる．

ただし，P，Q，R はいずれも A，B，C と異なる点とする．

このとき $\dfrac{BP}{PC}\cdot\dfrac{CQ}{QA}\cdot\dfrac{AR}{RB}=1$ ならば

3 直線 AP，BQ，CR は 1 点で交わる．



㊫ $\dfrac{BP}{PC}\cdot\dfrac{CQ}{QA}\cdot\dfrac{AR}{RB}=1$ ……①

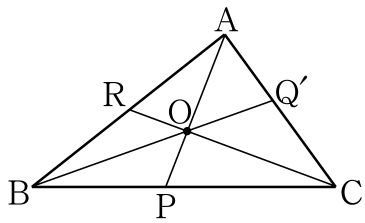
① が成り立つとする．

線分 AP と線分 CR の交点を O とし，

直線 BO と辺 CA の交点を Q$'$ とする．

3 直線 AP，BQ$'$，CR は 1 点で交わるのでチェバの定理から

$$\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ'}{Q'A}\cdot\frac{AR}{RB}=1 \quad ……②$$



① ＝ ② が成り立つので

$\dfrac{CQ}{QA}=\dfrac{CQ'}{Q'A}$ すなわち $CQ\cdot Q'A=CQ'\cdot QA$

ここで $Q'A=CA-CQ'$，$QA=CA-CQ$ が成り立つので代入して

$$CQ(CA-CQ')=CQ'(CA-CQ)$$

すなわち $CA(CQ-CQ')=0$

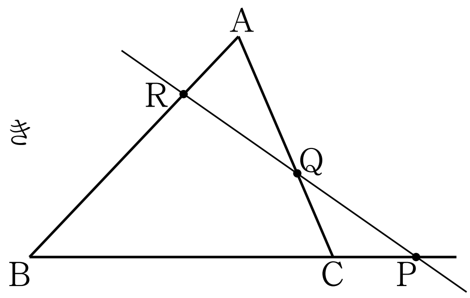
$CA\neq 0$ であるから $CQ=CQ'$

よって $Q=Q'$ であるから 3 直線 AP，BQ，CR は 1 点で交わる．

メネラウスの定理

ある直線が △ABC の 3 辺 BC，CA，AB
またはその延長とそれぞれ点 P，Q，R で交わるとき

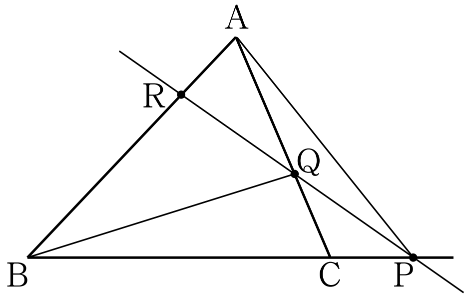
$$\frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PC}}\cdot\frac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{QA}}\cdot\frac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RB}}=1$$



注 逆も成り立つ．

考 面積比より

$$\frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PC}}=\frac{\triangle \mathrm{QBP}}{\triangle \mathrm{QCP}}$$
$$\frac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{QA}}=\frac{\triangle \mathrm{QCP}}{\triangle \mathrm{QAP}}$$
$$\frac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RB}}=\frac{\triangle \mathrm{QAP}}{\triangle \mathrm{QBP}}$$



よって

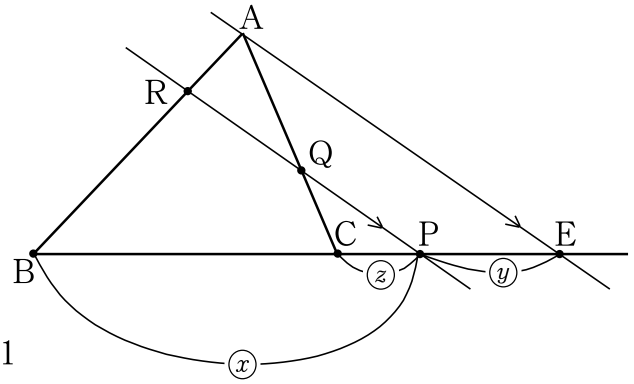
$$\frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PC}}\cdot\frac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{QA}}\cdot\frac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RB}}=\frac{\triangle \mathrm{QBP}}{\triangle \mathrm{QCP}}\cdot\frac{\triangle \mathrm{QCP}}{\triangle \mathrm{QAP}}\cdot\frac{\triangle \mathrm{QAP}}{\triangle \mathrm{QBP}}=1$$

考 点 A を通り，直線 PR に平行な直線と直線 BP の交点を E とする．

BP : PC : PE ＝ $x : y : z$ とすると

線分の比を考えて

$$\frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PC}}=\frac{x}{z}$$
$$\frac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{QA}}=\frac{z}{y}$$
$$\frac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RB}}=\frac{y}{x}$$



よって

$$\frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PC}}\cdot\frac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{QA}}\cdot\frac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RB}}=\frac{x}{z}\cdot\frac{z}{y}\cdot\frac{y}{x}=1$$

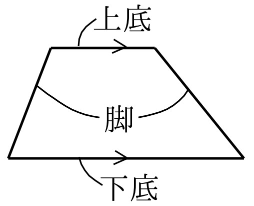
台形

少なくとも 1 組の向かい合う辺が平行である四角形を **台形**(だいけい) という．

平行な 2 本の向かい合う辺を台形の **底辺**(ていへん) といい，

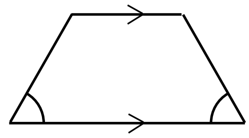
そのうち一方を **上底**(じょうてい)，他方を**下底**(かてい) という．

また，もう 1 組の向かい合う辺を台形の **脚**(きゃく) という．



等脚台形

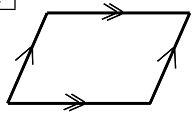
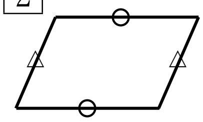
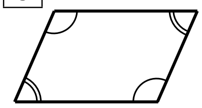
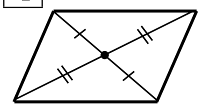
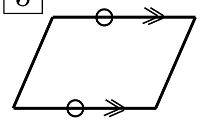
1 つの底辺の両端の内角が等しい台形を **等脚台形**(とうきゃくだいけい) という．



㊟ 脚が等しいという定義ではない．長方形でない平行四辺形は等脚台形ではない．

平行四辺形の性質

平行四辺形（へいこうしへんけい）は次の性質がある.

1

2

3

4

5


1 2 組の向かい合う辺がそれぞれ平行である（定義）

2 2 組の向かい合う辺の長さがそれぞれ等しい

3 2 組の向かい合う角がぞれぞれ等しい

4 対角線がそれぞれの中点で交わる

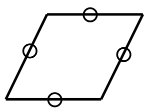
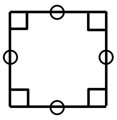
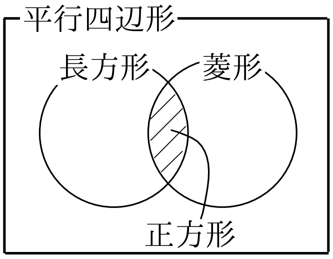
5 1 組の向かい合う辺が平行で長さが 等しい

㊟ 1 ～ 5 のうち 1 つが成り立てば平行四辺形である.

長方形，菱形，正方形

平行四辺形には次のような四角形がある.

1

2

3



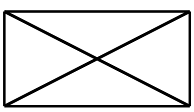
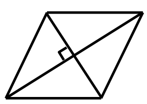
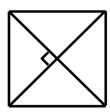
1 4 つの角が等しい四角形を 長方形（ちょうほうけい） という.

2 4 つの辺の長さが等しい四角形を 菱形（ひしがた） という

3 4 つの角が等しい かつ 4 つの辺の長さが等しい四角形を 正方形（せいほうけい） という.

対角線の性質

四辺形の対角線について，次の性質がある.

1

2

3


1 長方形の対角線の長さは等しい

2 菱形の対角線は垂直に交わる

3 正方形の対角線の長さは等しい かつ 垂直に交わる

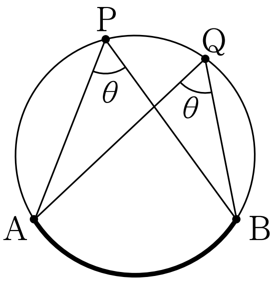
円周角の定理

円上に異なる 2 点 A，B をとる．

円上に弧 $\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$ の点以外の 2 点 P，Q をとると

$$\angle \mathrm{APB} = \angle \mathrm{AQB}$$

すなわち　同じ弧に対する円周角は等しい．



円周角と中心角の関係

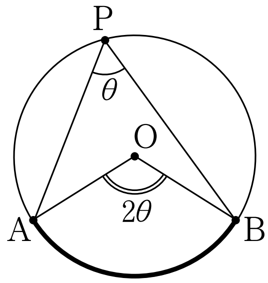
点 O を中心とする円上に異なる 2 点 A，B をとる．

円上に弧 $\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$ の点以外の 2 点 P，Q をとると

$\boxed{1}$ $\angle \mathrm{AOB} = 2\angle \mathrm{APB}$

$\boxed{2}$ $\angle \mathrm{APB} = \dfrac{1}{2}\angle \mathrm{AOB}$

すなわち　同じ弧に対する円周角と中心角の大きさの比は 1：2



直径と円周角

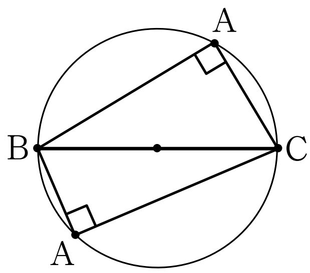
円上に異なる 3 点 A，B，C があるとき

線分 BC が円の直径 $\iff \angle \mathrm{BAC} = 90^\circ$

すなわち

$\boxed{1}$ 半円の弧（直径）に対する円周角は直角

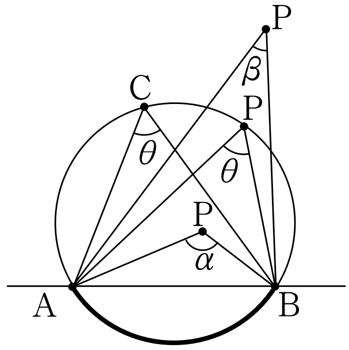
$\boxed{2}$ 直角三角形があれば斜辺は外接円の直径



円の内部と外部

円上に異なる 3 点 A，B，C がある．

直線 AB について点 C と同じ側に点 P をとる．



1 点 P が円の周上 $\Longleftrightarrow$ $\angle\mathrm{APB} = \angle\mathrm{ACB}$

2 点 P が円の内部 $\Longleftrightarrow$ $\angle\mathrm{APB} > \angle\mathrm{ACB}$

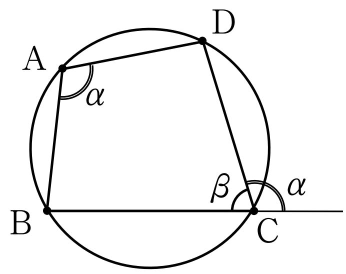
3 点 P が円の外部 $\Longleftrightarrow$ $\angle\mathrm{APB} < \angle\mathrm{ACB}$

点 P が円の周上，内部，外部のときの $\angle\mathrm{APB}$ をそれぞれ θ，α，β とすると

$$\beta < \theta < \alpha$$

円に内接する四角形の内角と外角

凸四角形 ABCD が円に内接するとき



1 四角形 ABCD の対角の和は 180°

2 四角形 ABCD の外角は
それと隣り合う内角の対角に等しい

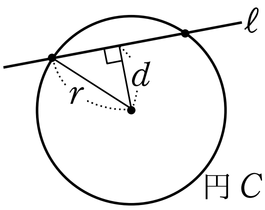
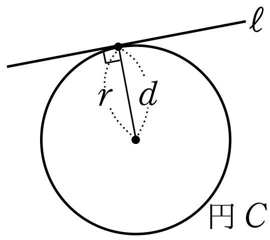
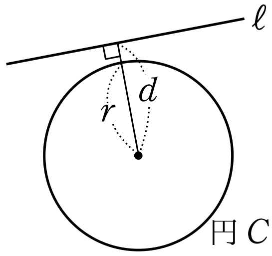
右図のように $\angle\mathrm{BAD} = \alpha$，$\angle\mathrm{BCD} = \beta$ とすると $\alpha + \beta = 180^\circ$

円と直線の位置関係

平面上に円 C と直線 ℓ がある.

円 C の中心と直線 ℓ の距離を d, 円 C の半径を r として,

円 C と直線 ℓ の位置関係は次のようになる.

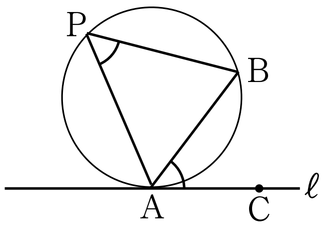
d と r	$d < r$	$d = r$	$d > r$
位置関係	異なる 2 点で交わる	1 点で接する	共有点をもたない
グラフ			

接弦定理

△ABP の外接円の点 A における接線を ℓ とし

右図のように点 C を ℓ 上にとるとき

$$\angle \mathrm{BAC} = \angle \mathrm{APB}$$



すなわち, 弦 AB と点 A における接線のなす角は

その角内にある $\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$ に対する円周角に等しい.

㊢ $\angle \mathrm{BAC} = \theta \ (0° < \theta < 90°)$ とおく.

円上に AP′ が直径となるように点 P′ をとると $\angle \mathrm{ABP'} = 90°$

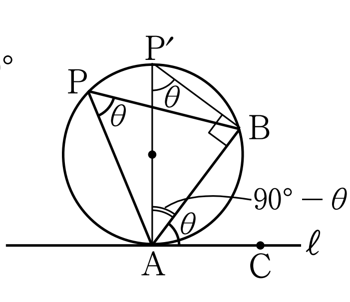
$\mathrm{AP'} \perp \ell$ なので $\angle \mathrm{CAP'} = 90°$

$\angle \mathrm{BAP'} = 90° - \theta$ であるから $\angle \mathrm{AP'B} = \theta$

円周角の定理から $\angle \mathrm{APB} = \angle \mathrm{AP'B} = \theta$

よって $\angle \mathrm{BAC} = \angle \mathrm{APB} \ (= \theta)$

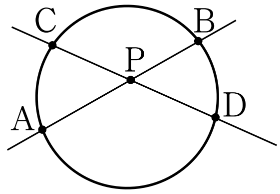
$\theta = 90°$, $90° < \theta < 180°$ のときも成り立つ.



方べきの定理

定点 P を通る直線と円が 2 つの交点をもつとき

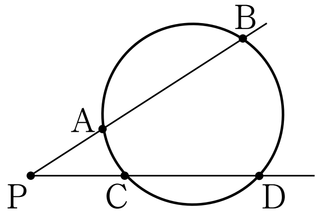
点 P と交点の距離の積は一定値になる．



すなわち

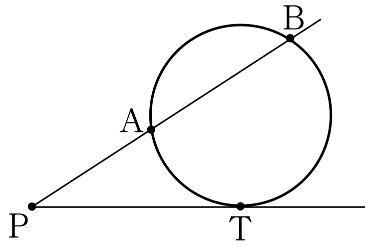
[1] 点 P を通る 2 直線が
円とそれぞれ 2 点 A，B と 2 点 C，D で交わるとき

$$\mathrm{PA} \cdot \mathrm{PB} = \mathrm{PC} \cdot \mathrm{PD}$$



[2] 円外にある点 P を通る 2 直線が
円と 2 点 A，B で交わり，円と点 T と接するとき

$$\mathrm{PA} \cdot \mathrm{PB} = \mathrm{PT}^2$$



(注) 逆も成り立つ．

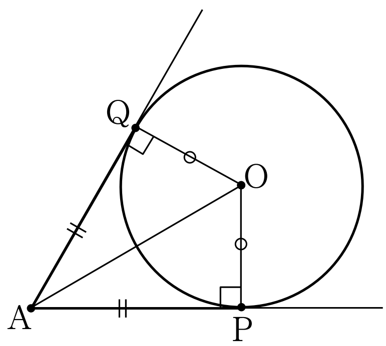
(考) [1] $\triangle \mathrm{PAC} \backsim \triangle \mathrm{PDB}$ より $\mathrm{PA} : \mathrm{PC} = \mathrm{PD} : \mathrm{PB}$
よって $\mathrm{PA} \cdot \mathrm{PB} = \mathrm{PC} \cdot \mathrm{PD}$
[2] $\triangle \mathrm{PAT} \backsim \triangle \mathrm{PTB}$ より $\mathrm{PA} : \mathrm{PT} = \mathrm{PT} : \mathrm{PB}$
よって $\mathrm{PA} \cdot \mathrm{PB} = \mathrm{PT}^2$

円外の点からの接線

平面上に中心が O の円と外部に点 A がある．

点 A から円へ接線を 2 本引き，接点を P，Q とすると

$\triangle \mathrm{OPA} \equiv \triangle \mathrm{OQA}$ であるから，次が成り立つ．



[1] $\mathrm{AP} = \mathrm{AQ}$（接線の長さは等しい）

[2] $\angle \mathrm{OAP} = \angle \mathrm{OAQ}$（直線 AO は $\angle \mathrm{PAQ}$ の二等分線）

[3] $\angle \mathrm{AOP} = \angle \mathrm{AOQ}$（直線 OA は $\angle \mathrm{POQ}$ の二等分線）

(考) 点 P，Q は接点なので $\angle \mathrm{OPA} = \angle \mathrm{OQA} = 90^\circ$
円の半径より $\mathrm{OP} = \mathrm{OQ}$
OA は共通である．
斜辺と他の 1 辺がそれぞれ等しい直角三角形であるから $\triangle \mathrm{OPA} \equiv \triangle \mathrm{OQA}$

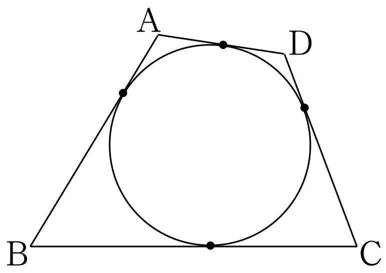
円に外接する四角形

四角形 ABCD が円に外接するとき

$$AB + CD = AD + BC$$

すなわち

四角形が円に外接するとき 対角の和が等しい.



㋕ 辺 AB，BC，CD，DA と円との接点をそれぞれ P，Q，R，S とおく.

$AP = AS = x$

$BP = BQ = y$

$CQ = CR = z$

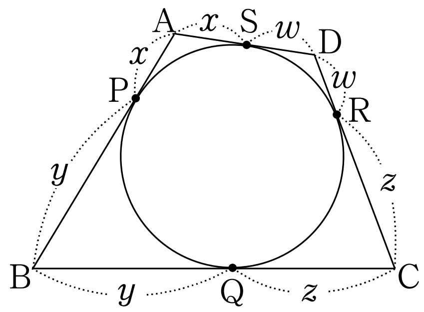
$DR = DS = w$

とすると

$AB + CD = AP + BP + CR + DR = x + y + z + w$

$AD + BC = AS + DS + BQ + CQ = x + y + z + w$

よって　$AB + CD = AD + BC$



多角形

線分だけで囲まれた平面図形を **多角形**（たかっけい） という.

多角形を囲む線分を多角形の **辺**（へん） という.

2 つの辺が交わる点をその多角形の **頂点**（ちょうてん） という.

n 個の辺をもつ多角形を **n 角形**（かっけい） または **n 辺形**（へんけい） という.

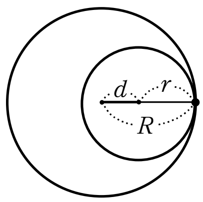
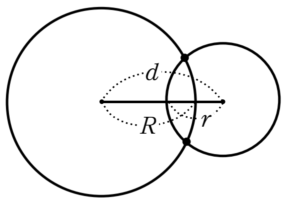
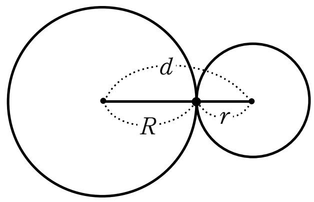
n 個の辺の長さがすべて等しい多角形を **正 n 角形**（せい　かっけい） という.

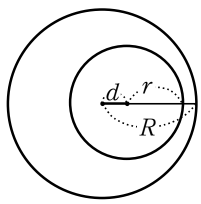
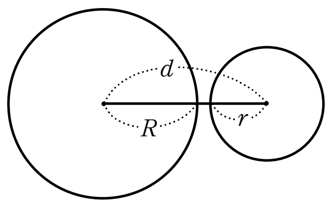
2 つの円の位置関係

平面上に 2 つの円がある．

中心間の距離を d，半径をそれぞれ R，r （$R > r$）として

2 つの円の位置関係は次のようになる．

d と R, r	$d = R - r$	$R - r < d < R + r$	$d = R + r$
2 つの円の位置関係	内接する（共有点 1 個）	異なる 2 点で交わる（共有点 2 個）	外接する（共有点 1 個）
グラフ			

d と R, r	$d < R - r$	$d > R + r$
2 つの円の位置関係	内包する（共有点 0 個）	共有点をもたない（共有点 0 個）
グラフ		

$R = r$ のときも成り立つが「内接する」ことや「内包する」ことはない．

2 つの円が共有点をもつ条件は $R - r \leqq d \leqq R + r$

㊗ 2 つの円の位置関係は中心間の距離と 2 つの円の半径で決まる．

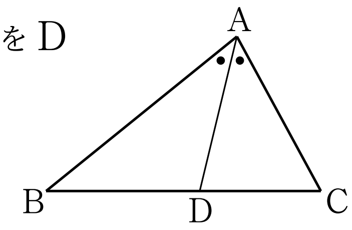
㊗ 2 つの円が接するとき，接点は 2 つの円の中心を結ぶ直線上にある．

三角形の内角の二等分線と線分の関係

$\triangle$ABC の $\angle$A の内角の二等分線と対辺 BC との交点を D

とすると

$$AD^2 = AB \cdot AC - BD \cdot DC$$



考 $\triangle$ABC の外接円と直線 AD の交点のうち A 以外の点を E とする.

内角の二等分線より　$\angle BAE = \angle CAD$

$\overset{\frown}{AB}$ の円周角より　$\angle ACB = \angle AEB$

2 角が等しいことから　$\triangle ABE \backsim \triangle ADC$

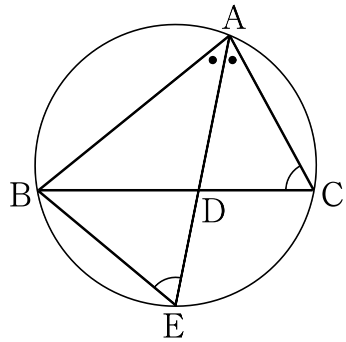
これより　$AB : AE = AD : AC$

すなわち　$AB \cdot AC = AD \cdot AE$

$AE = AD + DE$　であるから

$$\begin{aligned} AB \cdot AC &= AD \cdot (AD + DE) \\ &= AD^2 + AD \cdot DE \\ &= AD^2 + BD \cdot DC \quad \left(\because \text{方べきの定理より } AD \cdot DE = BD \cdot DC \right) \end{aligned}$$

よって　$AD^2 = AB \cdot AC - BD \cdot DC$

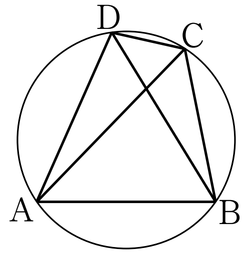


トレミーの定理

四角形 ABCD が円に内接するとき

$$\mathrm{AB} \cdot \mathrm{CD} + \mathrm{AD} \cdot \mathrm{BC} = \mathrm{AC} \cdot \mathrm{BD}$$

つまり（向かい合う辺の積の和)＝(対角線の積）



注 逆も成り立つ.

考（相似比を利用する）

線分 AC 上に $\angle\mathrm{CBD} = \angle\mathrm{EBA} = \alpha$ となる点 E をとる.

$\overset{\frown}{\mathrm{BC}}$ の円周角より $\angle\mathrm{BAE} = \angle\mathrm{BDC}$

2 角が等しいことから $\triangle\mathrm{ABE} \backsim \triangle\mathrm{DBC}$

これより $\mathrm{AB} : \mathrm{AE} = \mathrm{BD} : \mathrm{DC}$

すなわち $\mathrm{AE} \cdot \mathrm{BD} = \mathrm{AB} \cdot \mathrm{CD}$ ……①

$\angle\mathrm{DBE} = \beta$ とおくと $\angle\mathrm{ABD} = \angle\mathrm{CBE} = \alpha + \beta$

$\overset{\frown}{\mathrm{BC}}$ の円周角より $\angle\mathrm{ADB} = \angle\mathrm{ACB}$

2 角が等しいことから $\triangle\mathrm{ABD} \backsim \triangle\mathrm{EBC}$

これより $\mathrm{AD} : \mathrm{BD} = \mathrm{EC} : \mathrm{BC}$

すなわち $\mathrm{EC} \cdot \mathrm{BD} = \mathrm{AD} \cdot \mathrm{BC}$ ……②

これらのことから

$$\begin{aligned}\mathrm{AC} \cdot \mathrm{BD} &= (\mathrm{AE} + \mathrm{EC}) \cdot \mathrm{BD} \quad (\because \mathrm{AC} = \mathrm{AE} + \mathrm{EC}) \\ &= \mathrm{AE} \cdot \mathrm{BD} + \mathrm{EC} \cdot \mathrm{BD} \\ &= \mathrm{AB} \cdot \mathrm{CD} + \mathrm{AD} \cdot \mathrm{BC} \quad (\because ①, ②)\end{aligned}$$