数学Ⅰ　数と式「集合と命題」

~高校数学のまとめ~

教科書をもとに定義や定理を独自にパネル形式でまとめています．
何度も書き直し，加筆修正を繰り返しており，完成したものではありません．
人によっては不要な部分もあるでしょう．そういうときは読み飛ばしてください．

集合

範囲がはっきりしたものの集まりを **集合**(しゅうごう) という.

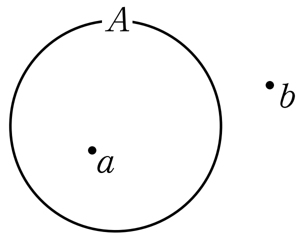
集合を構成している1つ1つのものをその集合の **要素**(ようそ) という.

a が集合 A の要素であることを a は集合 A に **属する**(ぞく) という.

集合とその要素について

集合 A に a が属することを $a \in A$ と表す.

集合 A に b が属さないことを $b \notin A$ と表す.



注 集合を表す記号は A のように大文字で表す.

補 要素を元(げん)ということがある.

空集合

要素が1つもない集合を **空集合**(くうしゅうごう) といい $\varnothing$ で表す.

補「部屋はあるけど誰もいない」というようなイメージ.

例 偶数かつ奇数の整数の集合を A とすると, そのような整数はない.
要素が1つもないので $A = \varnothing$

集合の表記

集合は $\{\quad\}$ を使って表すが，表し方は次の 2 つである．

$\boxed{1}$ 要素を書き並べて表す方法

$$\{a,\ b,\ c,\ \cdots\}$$

$\boxed{2}$ 要素が満たすべき条件を書いて表す方法

$$\{x \mid x \text{ が満たす条件}\}$$

例 3 以下の自然数の集合を A とすると

$\boxed{1}$ $A = \{1,\ 2,\ 3\}$

$\boxed{2}$ $A = \{x \mid x$ は 3 以下の自然数$\}$

有限集合と無限集合

$\boxed{1}$ 要素の個数が有限である集合を **有限集合**（ゆうげんしゅうごう）という．

$\boxed{2}$ 要素の個数が無限にある集合を **無限集合**（むげんしゅうごう）という．

例 $\boxed{1}$ $\{x \mid x$ は 3 以下の自然数$\} = \{1,\ 2,\ 3\}$ は要素が 3 個で有限なので有限集合である．

$\boxed{2}$ $\{x \mid x$ は自然数$\} = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \cdots\}$ は要素が無限にあるので無限集合である．

部分集合

$a \in A$ ならば $a \in B$

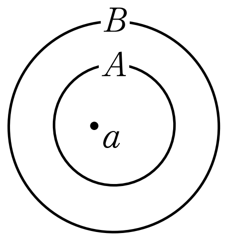
すなわち 集合 A のすべての要素が集合 B の要素になることを

集合 A は集合 B の 部分集合（ぶぶんしゅうごう） といい $A \subset B$ と表す.

とくに 集合 A は A 自身の部分集合であり $A \subset A$

また 空集合 $\varnothing$ はすべての集合の部分集合とする.

つまり 任意の集合 A に対して $\varnothing \subset A$



㊟ $A=\{1, 2\}$，$B=\{1, 2, 3\}$，$C=\{2, 3, 4\}$

$1 \in B$，$2 \in B$ であるから 集合 A のすべての要素が集合 B の要素になっている.

すなわち A は B の部分集合であり $A \subset B$

$1 \notin C$ であるから A は C の部分集合ではない.

$1 \in A$，$2 \in A$ であるから 集合 A のすべての要素が集合 A の要素になっている.

すなわち A は A の部分集合であり $A \subset A$

また $\varnothing \subset A$，$\varnothing \subset B$，$\varnothing \subset C$

集合の相等

集合 A と集合 B の要素がすべて一致していることを

集合 A と B は等しいといい $A = B$ で表す.

とくに $A = B \iff A \subset B$ かつ $A \supset B$

㊟ $A=\{x \mid x$ は 5 以下の自然数$\}$，$B=\{1, 2, 3, 4, 5\}$ のとき $A = B$

このとき $A \subset B$ かつ $A \supset B$

真部分集合

2 つの集合 A，B について

$A \subset B$ かつ $A \neq B$

すなわち A は B の部分集合であるが A と B は等しくないことを

集合 A は集合 B の 真部分集合（しんぶぶんしゅうごう） という.

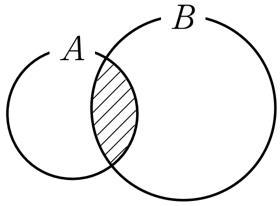
2つの集合の共通部分

2つの集合 A，B のどちらにも属する要素全体の集合を

A と B の **共通部分**（きょうつうぶぶん） といい $A \cap B$（∩：きゃっぷ） と表す.

すなわち

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ かつ } x \in B\}$$



㊞ $A = \{1, 2, 3\}$，$B = \{2, 3, 4\}$ のとき $A \cap B = \{2, 3\}$

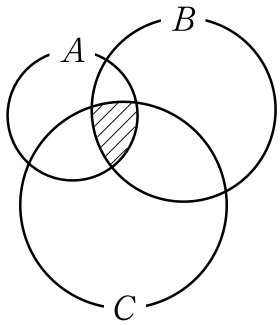
3つの集合の共通部分

3つの集合 A，B，C のどれにも属する要素全体の集合を

A と B と C の **共通部分** といい $A \cap B \cap C$ と表す.

すなわち

$$A \cap B \cap C = \{x \mid x \in A \text{ かつ } x \in B \text{ かつ } x \in C\}$$

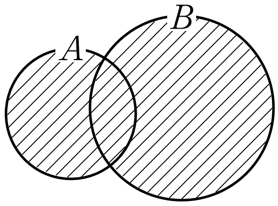


㊞ $A = \{1, 2, 3\}$，$B = \{2, 3, 4\}$，$C = \{3, 4, 5\}$ のとき $A \cap B \cap C = \{3\}$

2つの集合の和集合

2つの集合 A，B の少なくとも一方に属する要素全体の集合を

A と B の **和集合**（わしゅうごう） といい $A \cup B$（かっぷ） と表す．



すなわち

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ または } x \in B\}$$

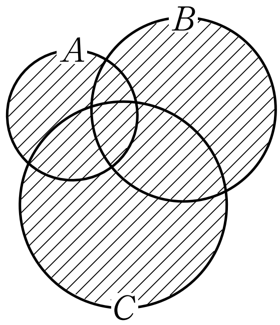
例 $A = \{1, 2, 3\}$，$B = \{2, 3, 4\}$ のとき $A \cup B = \{1, 2, 3, 4\}$

話 喫茶店で「珈琲または紅茶」というときは，珈琲か紅茶のどちらか一方ということになりますが，数学だと「珈琲と紅茶」の両方飲んでもよいということになります．

3つの集合の和集合

3つの集合 A，B，C の少なくとも1つの要素全体の集合を

A と B と C の **和集合** といい $A \cup B \cup C$ と表す．



すなわち

$$A \cup B \cup C = \{x \mid x \in A \text{ または } x \in B \text{ または } x \in C\}$$

例 $A = \{1, 2, 3\}$，$B = \{2, 3, 4\}$，$C = \{3, 4, 5\}$ のとき $A \cup B \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

全体集合と補集合

集合を考えるときは

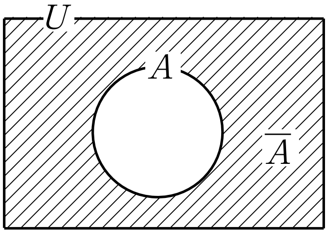
1 つの集合 U を定め，その部分集合について考えることが多い．

このUを 全体集合（ぜんたいしゅうごう） という．

全体集合 U の部分集合 A に対して

U の要素で A に属さない要素全体の集合を

U に関する A の 補集合（ほしゅうごう） といい $\overline{A}$ と表す．



すなわち

$$\overline{A} = \{x \mid x \in U \text{ かつ } x \notin A\}$$

㊎ 全体集合 $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ とその部分集合 $A = \{1, 2\}$ に対して $\overline{A} = \{3, 4, 5\}$

補集合の性質

U を全体集合とし，A，B をその部分集合とする．

[1] $A \cap \overline{A} = \varnothing$

[2] $A \cup \overline{A} = U$

[3] $\overline{(\overline{A})} = A$

[4] $A \subset B$ ならば $\overline{B} \subset \overline{A}$

(補) [1]，[2] は定義から明らか．

[3] 補集合の補集合はもとの集合になる．

(例) [4] 全体集合 $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ とその部分集合 $A = \{1, 2\}$，$B = \{1, 2, 3\}$ のとき

$A \subset B$

このとき $\overline{A} = \{3, 4, 5\}$，$\overline{B} = \{4, 5\}$ であるから $\overline{B} \subset \overline{A}$

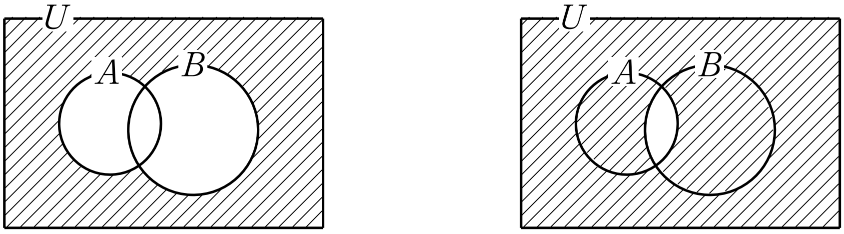
ド・モルガンの法則

U を全体集合とし，A，B をその部分集合とする．

$\boxed{1}$ $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$

$\boxed{2}$ $\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$

$\boxed{1}$ のベン図　　　　$\boxed{2}$ のベン図



㊎ 全体集合 $U=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$ とその部分集合 $A=\{1,\ 2,\ 3\}$，$B=\{2,\ 3,\ 4\}$ について
$A\cup B=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$，$A\cap B=\{2,\ 3\}$，$\overline{A}=\{4,\ 5\}$，$\overline{B}=\{1,\ 5\}$
$\boxed{1}$ $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}=\{5\}$
$\boxed{2}$ $\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}=\{1,\ 4,\ 5\}$

3 つの集合でのド・モルガンの法則

3 つの集合 A，B，C について

$\boxed{1}$ $\overline{A\cup B\cup C}=\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C}$

$\boxed{2}$ $\overline{A\cap B\cap C}=\overline{A}\cup\overline{B}\cup\overline{C}$

㊎ 全体集合 $U=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$ とその部分集合 $A=\{1,\ 2,\ 3\}$，$B=\{2,\ 3,\ 4\}$，
$C=\{3,\ 4,\ 5\}$ について
$A\cup B\cup C=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$，$A\cap B\cap C=\{3\}$
$\overline{A}=\{4,\ 5,\ 6\}$，$\overline{B}=\{1,\ 5,\ 6\}$，$\overline{C}=\{1,\ 2,\ 6\}$
$\boxed{1}$ $\overline{A\cup B\cup C}=\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C}=\{6\}$
$\boxed{2}$ $\overline{A\cap B\cap C}=\overline{A}\cup\overline{B}\cup\overline{C}=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$

(補) バーをばらすと $\cup$ と $\cap$ が入れかわる．

(話) オーガスタス・ド・モルガン（1806− 1871）インド生まれのイギリスの数学者．

命題

正しいか正しくないかが明確に定まる文や式を **命題**（めいだい）という．

命題が正しいとき，その命題は **真**（しん） または **成り立つ** という．

命題が正しくないとき，その命題は **偽**（ぎ） または **成り立たない** という．

㊎「2 は偶数である」という文は正しいと定まるので **命題** である．
「100 は大きい」という文は正しいか正しくないかは定まらないので **命題** ではない．

条件

文字を含む文や式でその文字に値を代入したときに

真偽が定まる文や式を **条件**（じょうけん） という．

条件を考えるとき

条件に含まれるもの（文字）がどのような集合の要素かを明確にさせておく．

この集合を その条件の全体集合という．

㊓ 条件は p，q などの小文字で表すことが多い．

㊎ x を整数とするとき「p：x は偶数である」は文字 x を含む文で

$x=2$ とすると真，　$x=3$ とすると偽

x に値を代入すると p の真偽が決まるので，p は **条件** である．

この条件の全体集合は整数の集合である．

否定

条件 p に対し

「p でない」という条件を条件 p の 否定（ひてい） といい $\overline{p}$ と表す.

仮定と結論

p, q を条件とする.

命題「p ならば q」を 命題「$p \Longrightarrow q$」 とかく.

この命題で p を 仮定（かてい）, q を結論（けつろん） という.

真理集合

条件 p を満たすもの（条件 p が真となるもの）全体の集合を

p の 真理集合（しんりしゅうごう） という.

㊟ 教科書では「条件 p を満たすものの集合」という言い回しになっている.

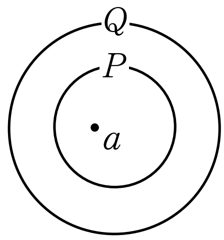
命題が真・偽になる条件

条件 p, q を満たすものの集合（真理集合）をそれぞれ P, Q とする.

1 命題「$p \implies q$」が **真** であるとは

p を満たすものはすべて q を満たす ことである.

つまり $P \subset Q$

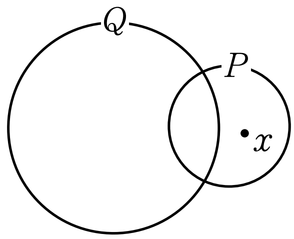


2 命題「$p \implies q$」が **偽** であるとは

p を満たすが q を満たさないものが存在することである.

この存在するものを **反例**（はんれい）という.

つまり 反例は $\{x \mid x \in P$ かつ $x \notin Q\}$



例 1 2 つの条件

p : x は整数

q : x は実数

とすると, $p \Longrightarrow q$ は真である.

p, q の真理集合をそれぞれ P, Q とすると $P \subset Q$ が成り立つ.

2 2 つの条件

p : x は整数

q : x は自然数

とすると, $p \Longrightarrow q$ は偽である.

$x = -1$ とすると p を満たすが q を満たさない.

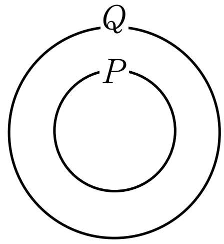
（-1 は整数であるが自然数ではない）

つまり, 反例は $x = -1$

十分条件と必要条件

p，q を条件とする．

命題「$p \implies q$」が **真** であるとき



$\boxed{1}$ p は q であるための **十分条件**（じゅうぶんじょうけん） であるという．

$\boxed{2}$ q は p であるための **必要条件**（ひつようじょうけん） であるという．

例 命題「x は整数 $\implies$ x は実数」は真である．

$\boxed{1}$ x が整数であることは x が実数であるための十分条件である．

$\boxed{2}$ x が実数であることは x が整数であるための必要条件である．

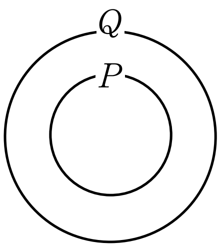
補 矢印の向きで覚えるより集合でイメージするとよい．

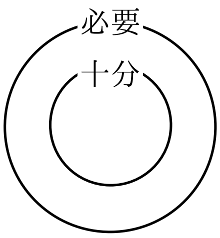
要

条件 p，q の満たすものの集合をそれぞれ P，Q とすると

命題「$p \implies q$」が真 すなわち $P \subset Q$

p が主語のとき，q が主語のときで下の図のようになる．





必要十分条件・同値

条件 p，q を満たすものの集合（真理集合）をそれぞれ P，Q とする．

命題「$p \Longrightarrow q$」が真 かつ 命題「$q \Longrightarrow p$」が真

つまり $P=Q$ のとき

$\boxed{1}$ p は q であるための 必要十分条件（ひつようじゅうぶんじょうけん） であるという．

$\boxed{2}$ q は p であるための 必要十分条件 であるという．

$\boxed{3}$ p と q は 同値（どうち） であるという．

同値変形

条件 p，q について

「$p \Longrightarrow q$」が真 かつ 「$q \Longrightarrow p$」が真

つまり p と q が同値であることを $p \Longleftrightarrow q$ とかけて

この p と q の言いかえを 同値変形（どうちへんけい） といい $\Longleftrightarrow$ を 同値記号 という．

例 $x^2=1 \Longleftrightarrow x=\pm 1$

例 「$x=1 \Longrightarrow x^2=1$」 は成り立つが

「$x^2=1 \Longrightarrow x=1$」 は成り立たない．（反例は $x=-1$）

つまり $x=1 \Longleftrightarrow x^2=1$ は間違いで，正しくは $x=1 \Longleftrightarrow x>0$ かつ $x^2=1$

補 $\Longleftrightarrow$ の乱用はやめた方がよい．

あ $x^2=1 \Longleftrightarrow x=\pm 1$

い $x^2=1$ であることと $x=\pm 1$ であることは同値である

う $x^2=1$ すなわち $x=\pm 1$

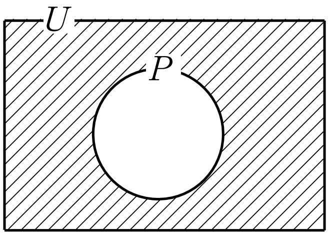
⋮

説明の仕方はいろいろあります．

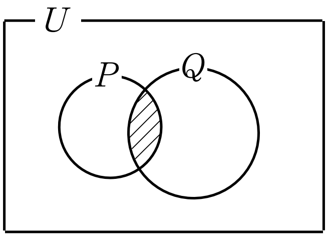
条件と集合

全体集合を U とし，条件 p，q を満たすものの集合をそれぞれ P，Q とする．

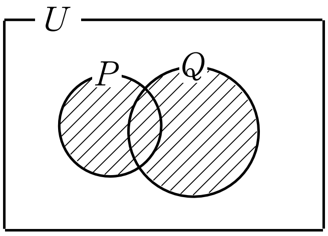
1 $\overline{p}$ を満たすものの集合は $\overline{P}$



2 p かつ q を満たすものの集合は $P \cap Q$



3 p または q を満たすものの集合は $P \cup Q$



考 条件を集合で考えているだけ．

「かつ」「または」の否定

条件 p，q に対し，次が成り立つ．

$\boxed{1}$ $\overline{p\ \text{かつ}\ q} \iff \overline{p}\ \text{または}\ \overline{q}$

$\boxed{2}$ $\overline{p\ \text{または}\ q} \iff \overline{p}\ \text{かつ}\ \overline{q}$

考 ド・モルガンの法則

「かつ」「または」の否定（3つの条件）

条件 p，q，r に対し，次が成り立つ．

$\boxed{1}$ $\overline{p\ \text{かつ}\ q\ \text{かつ}\ r} \iff \overline{p}\ \text{または}\ \overline{q}\ \text{または}\ \overline{r}$

$\boxed{2}$ $\overline{p\ \text{または}\ q\ \text{または}\ r} \iff \overline{p}\ \text{かつ}\ \overline{q}\ \text{かつ}\ \overline{r}$

考 ド・モルガンの法則

全称命題

全体集合を U, $x \in U$ として x に関する条件 $p(x)$ を考える.

次の $\boxed{1}$,$\boxed{2}$,$\boxed{3}$ の命題は同値である.

$\boxed{1}$ すべての x について $p(x)$

$\boxed{2}$ どのような x に対しても $p(x)$

$\boxed{3}$ 任意の x について $p(x)$

これは 全体集合 U のすべての要素が 条件 $p(x)$ を満たすということである.

このような形式の命題を **全称命題**(ぜんしょうめいだい) という.

㊎ 実数全体の集合を U, $x \in U$ として $p(x): x^2 \geqq 0$

$\boxed{1}$ すべての実数 x について $x^2 \geqq 0$

$\boxed{2}$ どのような実数 x に対しても $x^2 \geqq 0$

$\boxed{3}$ 任意の実数 x について $x^2 \geqq 0$

これは真である.

(補) 「任意の x」とは「知らない人が選ぶ x」というイメージ.

(補) 論理学では「$\forall x \in U$, $p(x)$」と表す.

存在命題

全体集合をU，$x \in U$ としてxに関する条件 $p(x)$ を考える．

次の $\boxed{1}$,$\boxed{2}$,$\boxed{3}$ の命題は同値である．

$\boxed{1}$ あるxについて $p(x)$

$\boxed{2}$ 適当なxについて $p(x)$

$\boxed{3}$ $p(x)$ であるxが存在する

これは

全体集合Uの中に条件 $p(x)$ を満たすものが少なくとも 1 つ存在する

ということである．

このような形式の命題を 存在命題(そんざいめいだい) という．

㊐例 実数全体の集合をU，$x \in U$ として　$p(x) : x^2 < 10$

$\boxed{1}$ ある実数xについて $x^2 < 10$

$\boxed{2}$ 適当な実数xについて $x^2 < 10$

$\boxed{3}$ $x^2 < 10$ である実数xが存在する

これは $p(0) : 0 < 10$ より $x = 0$ が存在するから真である．

㊐補 論理学では「$\exists x \in U,\ p(x)$」と表す．

全称命題，存在命題の否定

xに関する条件 $p(x)$ に対し

$\boxed{1}$ $\overline{\text{すべての}\,x\,\text{について}\ p(x)} \iff \text{ある}\,x\,\text{について}\ \overline{p(x)}$

$\boxed{2}$ $\overline{\text{ある}\,x\,\text{について}\ p(x)} \iff \text{すべての}\,x\,\text{について}\ \overline{p(x)}$

㊐考 ド・モルガンの法則

㊐例 $\boxed{1}$ $\overline{\text{すべての実数}\,x\,\text{について}\ x^2 \geqq 0} \iff \text{ある実数}\,x\,\text{について}\ x^2 < 0$

$\boxed{2}$ $\overline{\text{ある実数}\,x\,\text{について}\ x^2 < 10} \iff \text{すべての実数}\,x\,\text{について}\ x^2 \geqq 10$

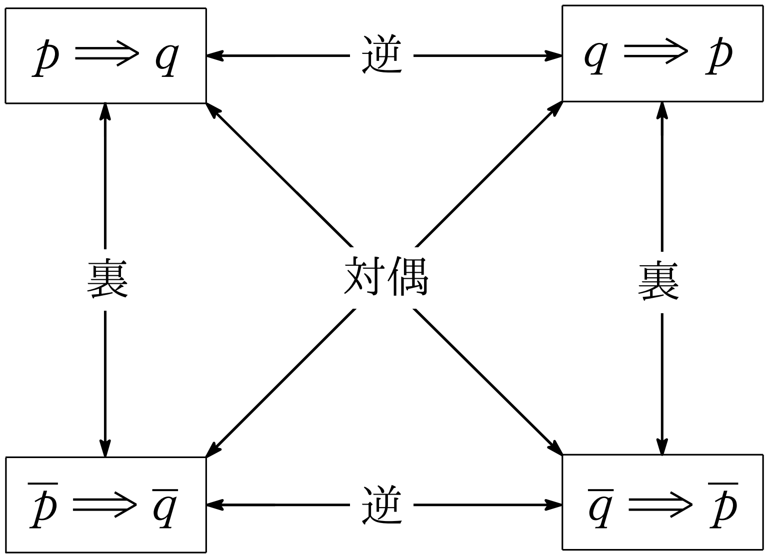
命題の逆・裏・対偶

条件 p, q についての命題「$p \implies q$」に対して

1. 命題「$q \implies p$」を 命題「$p \implies q$」の 逆（ぎゃく） という.

2. 命題「$\overline{p} \implies \overline{q}$」を 命題「$p \implies q$」の 裏（うら） という.

3. 命題「$\overline{q} \implies \overline{p}$」を 命題「$p \implies q$」の 対偶（たいぐう） という.



例 命題「x が偶数である $\implies$ x が 4 の倍数である」について

1. 逆の命題は「x が 4 の倍数である $\implies$ x が偶数ある」
2. 裏の命題は「x が偶数ではない $\implies$ x が 4 の倍数ではない」
3. 対偶命題は「x が 4 の倍数ではない $\implies$ x が偶数ではない」

対偶の真偽

命題「$p \implies q$」と その対偶「$\overline{q} \implies \overline{p}$」は **真偽が一致** する.

すなわち

$\boxed{1}$ 命題「$p \implies q$」が 真 $\iff$ 「$\overline{q} \implies \overline{p}$」が 真

$\boxed{2}$ 命題「$p \implies q$」が 偽 $\iff$ 「$\overline{q} \implies \overline{p}$」が 偽

㊫ $P \subset Q \iff \overline{Q} \subset \overline{P}$

対偶命題を用いた証明法

命題「$p \implies q$」が真であることを 証明 するのに

対偶「$\overline{q} \implies \overline{p}$」が真であることを示す 論法 がある.

㊫ 対偶命題ともとの命題の真偽は一致するので，対偶命題が真ならばもとの命題も真である.

背理法

ある命題を証明するのに

その命題が成り立たないと仮定すると，矛盾が生じる.

したがって，その命題は成り立たなければならない.

とする 論法 がある.

このような論法を 背理法（はいりほう） という.

とくに 条件 p，q についての命題「$p \implies q$」を証明するには

命題「$p \implies \overline{q}$」と仮定して矛盾を導くことで証明される.

㊫補 直接証明するのが困難なときによく用いる.

高校の教科書では，変数 x を含む条件 $p(x)$，$q(x)$ を考え，真理集合で真偽を考えている．しかし，一般的な論理では変数を考えず，基本的に p，q は変数を含まない命題として考える．変数を含まない p，q を定数関数のように考えてもよいが，p，q は条件ではなく命題とする．以下では，p が起こることを真，起こらないことを偽と明確に決まることとして，基本的な論理記号を参考にまとめておく．

論理積（AND）

2 つの命題 p，q が
いずれも真ならば真になり，それ以外のときは偽となるものを

$$p \land q$$

と表し，右の表のようになる．

p	q	$p \land q$
真	真	真
真	偽	偽
偽	真	偽
偽	偽	偽

㊟ $P \cap Q$ のイメージ

論理和（OR）

2 つの命題 p，q が
いずれか一方が真ならば真になり，いずれも偽ならば偽となるものを

$$p \lor q$$

と表し，右の表のようになる．

p	q	$p \land q$
真	真	真
真	偽	真
偽	真	真
偽	偽	偽

㊟ $P \cup Q$ のイメージ

論理否定(NOT)

命題 p に対し

p が真ならば偽になり，p が偽ならば真となるものを

$$\neg p$$

と表し，右の表のようになる．

p	$\neg p$
真	偽
偽	真

補 集合 P の補集合 $\overline{P}$ のイメージ

補 p または $\neg p$ のいずれかは必ず真となる．これを排中律(はいちゅうりつ)と呼ぶ．

仮定と結論

2 つの命題 p，q について

命題「もし p であるならば，そのとき q である」を

命題「$p \rightarrow q$」

とかく．この命題で p を仮定(かてい)，q を結論(けつろん)という．

補 英語では「if p then q」

例 正三角形であるならば，二等辺三角形である．

命題が真・偽になる条件

2 つの命題 p，q について，右の表のようになり

p	q	$p \to q$
真	真	真
真	偽	偽
偽	真	真
偽	偽	真

$\boxed{1}$ 命題「$p \to q$」が 真 であるのは $\neg p \vee q$

$\boxed{2}$ 命題「$p \to q$」が 偽 であるのは $p \wedge \neg q$

㊀考 $\boxed{2}$ 命題「$p \to q$ が偽」となるのは $p \wedge \neg q$ のみ

$\boxed{1}$ $\neg(p \wedge \neg q) = \neg p \vee q$

補 p が偽ならば q の真偽によらず「$p \to q$ は真」となる

例 p：晴天である，q：散歩へ行く

p	q	$p \to q$
晴天である	散歩へ行く	真
晴天である	散歩へ行かない	偽
晴天でない	散歩へ行く	真
晴天でない	散歩へ行かない	真

偽となるのは「晴天であるが散歩に行かない」ことのみ．

晴天でなく，雨がふったとしても散歩へ行くのは問題なしという感じ．

注 真を 1，偽を 0 として表をつくることもある．

p	q	$p \to q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1