次の問に答えよ．

(1)　相異なる自然数 a，b，c について，$|a-b|+|b-c|$ が偶数であることと，$|a-c|$ が偶数であることは同値である．このことを示せ．

(2)　1 から 5 までの番号をつけた 5 枚の札から，1 枚ずつ抜き取り，戻さない試行を考える．取り出した札に書かれた番号を順に a，b，c，d，e とし

$$X=|a-b|+|b-c|+|c-d|+|d-e|$$

とおく．X が偶数となる確率を求めよ．

〔2006　神大 理系 後期〕

〔解答例〕

(1)　$|a-b|+|b-c|$ が偶数 $\iff (a-b)+(b-c)$ が偶数

← k を整数として
$|k|$ の偶奇と k の偶奇は同じ!
つまり 絶対値記号をはずしても
偶奇は変わらない!

$\iff$ $a-c$ が偶数

$\iff$ $|a-c|$ が偶数

よって，示された．

(2)　(a, b, c, d, e) の決め方は　$5!=120$（通り）……①

これらは同様に確からしい．

X が偶数 $\iff |a-b|+|b-c|+|c-d|+|d-e|$ が偶数

$\iff (a-b)+(b-c)+(c-d)+(d-e)$ が偶数

$\iff a-e$ が偶数

$\iff a$ と e の偶奇が一致する．

① のうち，X が偶数となるのは

a と e がともに偶数　または　a と e がともに奇数

であるときより

$2\cdot1\cdot3!+3\cdot2\cdot3!=8\cdot3!$（通り）……②

よって，求める確率は $\dfrac{②}{①}$ として　$\dfrac{8\cdot3!}{5\cdot4\cdot3!}=\mathbf{\dfrac{2}{5}}$