p を 2 以上の自然数とし，数列 $\{x_n\}$ は

$$x_1 = \frac{1}{2^p+1},\quad x_{n+1} = |2x_n - 1| \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

をみたすとする．以下の問に答えよ．

(1)　$p = 3$ のとき，x_n を求めよ．

(2)　$x_{p+1} = x_1$ であることを示せ．

〔2020　神大 理系 前期〕

〔解答例〕

(2) は実験してみよう！

$p=5$ のとき

分母は変わらず
分子は規則的に減少

$$x_1 = \frac{1}{33}$$
$$x_2 = |2x_1 - 1| = \left|2\cdot\frac{1}{33} - 1\right| = \frac{31}{33}$$
−2
$$x_3 = |2x_2 - 1| = \left|2\cdot\frac{31}{33} - 1\right| = \frac{29}{33}$$
−4
$$x_4 = |2x_3 - 1| = \left|2\cdot\frac{29}{33} - 1\right| = \frac{25}{33}$$
−8
$$x_5 = |2x_4 - 1| = \left|2\cdot\frac{25}{33} - 1\right| = \frac{17}{33}$$
−16
$$x_6 = |2x_5 - 1| = \left|2\cdot\frac{17}{33} - 1\right| = \frac{1}{33} = x_1$$

(1)　$p = 3$ のとき

$$x_1 = \frac{1}{2^3+1} = \frac{1}{9}$$
$$x_2 = |2x_1 - 1| = \left|2\cdot\frac{1}{9} - 1\right| = \frac{7}{9}$$
$$x_3 = |2x_2 - 1| = \left|2\cdot\frac{7}{9} - 1\right| = \frac{5}{9}$$
$$x_4 = |2x_3 - 1| = \left|2\cdot\frac{5}{9} - 1\right| = \frac{1}{9}$$

$x_4 = x_1$ より $x_{n+3} = x_n$ $(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ が成り立つ．

よって $$\boldsymbol{x_n = \begin{cases} \dfrac{1}{9} & (n = 3k-2) \\ \dfrac{7}{9} & (n = 3k-1) \\ \dfrac{5}{9} & (n = 3k) \end{cases} \quad (k = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)}$$

(2)　$2 \leqq n \leqq p+1$ の n に対して

$$x_n = \frac{2^p + 1 - 2^{n-1}}{2^p+1} \quad \cdots\cdots Ⓐ$$

← 直接漸化式は解けないので
推測して，数学的帰納法できちんと示します．

が成り立つを数学的帰納法で示す．

(Ⅰ)　p は自然数なので $2^p - 1 > 0$

$$x_2 = |2x_1 - 1| = \left|2\cdot\frac{1}{2^p+1} - 1\right| = \left|\frac{1-2^p}{2^p+1}\right| = \frac{2^p-1}{2^p+1}$$

$n = 2$ のとき Ⓐ は成り立つ．

(Ⅱ)　$n = k$ $(2 \leqq k \leqq p)$ のとき Ⓐ が成り立つと仮定すると

$$x_k = \frac{2^p + 1 - 2^{k-1}}{2^p+1}$$

が成り立つ．

このとき　$2^p + 1 - 2^k > 0$ であるから

$$x_{k+1} = |2x_k - 1| = \left|2\cdot\frac{2^p+1-2^{k-1}}{2^p+1} - 1\right|$$
$$= \left|\frac{2\cdot 2^p + 2 - 2^k - (2^p+1)}{2^p+1}\right| = \left|\frac{2^p+1-2^k}{2^p+1}\right|$$
$$= \frac{2^p+1-2^k}{2^p+1}$$

すなわち $n = k+1$ のときも Ⓐ は成り立つ．

以上，(Ⅰ)，(Ⅱ) より示された．

このことから $x_{p+1} = \dfrac{2^p+1-2^p}{2^p+1} = \dfrac{1}{2^p+1} = x_1$

よって $x_{p+1} = x_1$ である．