空間において，2 点 A(0, 1, 0)，B(−1, 0, 0) を通る直線を ℓ とする．次の問いに答えよ．

(1)　点 P を ℓ 上に，点 Q を z 軸上にとる．$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ がベクトル $(3,\ 1,\ -1)$ と平行になるときの P と Q の座標をそれぞれ求めよ．

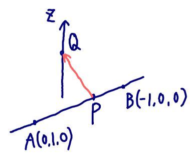
(2)　点 R を ℓ 上に，点 S を z 軸上にとる．$\overrightarrow{\mathrm{RS}}$ が $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ およびベクトル $(0,\ 0,\ 1)$ の両方に垂直になるときの R と S の座標をそれぞれ求めよ．

(3)　R，S を (2) で求めた点とする．点 T を ℓ 上に，点 U を z 軸上にとる．また，$\vec{v}=(a,\ b,\ c)$ は零ベクトルでなく，$\overrightarrow{\mathrm{RS}}$ に垂直ではないとする．$\overrightarrow{\mathrm{TU}}$ が $\vec{v}$ と平行になるときの T と U の座標をそれぞれ求めよ．

〔2013　神大 前期〕

〔解答例〕

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(0,\ 1,\ 0)$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=(-1,\ 0,\ 0)$，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(-1,\ -1,\ 0)$



$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=p\,\overrightarrow{\mathrm{AB}}$

$\Leftrightarrow\ \overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=p\,\overrightarrow{\mathrm{AB}}$

点 P は ℓ 上にあるから，実数 p を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+p\,\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(0,\ 1,\ 0)+p(-1,\ -1,\ 0)=(-p,\ 1-p,\ 0)$$

点 Q は z 軸上にあるから，実数 q を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=(0,\ 0,\ q)$$

← z 軸上の点は x=0, y=0

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OQ}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(p,\ -1+p,\ q)$$

$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\,/\!\!/\,(3,\ 1,\ -1)$ となるとき，実数 k を用いて

平行なので実数倍

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=k(3,\ 1,\ -1)\quad \text{すなわち}\quad (p,\ p-1,\ q)=(3k,\ k,\ -k)$$

$$\begin{cases} p=3k \\ p-1=k \\ q=-k \end{cases}\qquad \therefore\ p=\frac{3}{2},\ q=-\frac{3}{2},\ k=\frac{1}{2}$$

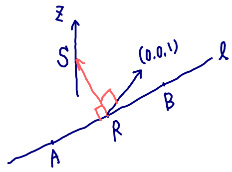
よって　$\mathbf{P}\left(-\frac{3}{2},\ -\frac{1}{2},\ 0\right)$，$\mathbf{Q}\left(0,\ 0,\ -\frac{1}{2}\right)$

(2)　点 R を ℓ 上に，点 S は z 軸上にとるから (1) と同様にして実数 r，s を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=(-r,\ 1-r,\ 0),\quad \overrightarrow{\mathrm{OS}}=(0,\ 0,\ s)$$

(1) で P を R (p を r)
Q を S (q を s)

$$\overrightarrow{\mathrm{RS}}=\overrightarrow{\mathrm{OS}}-\overrightarrow{\mathrm{OR}}=(r,\ r-1,\ s)$$



$\overrightarrow{\mathrm{RS}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ かつ $\overrightarrow{\mathrm{RS}}\perp(0,\ 0,\ 1)$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{RS}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=-r-r+1=0\qquad \therefore\ r=\frac{1}{2}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{RS}}\cdot(0,\ 0,\ 1)=s=0$$

垂直なので内積0

よって　$\mathbf{R}\left(-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ 0\right)$，$\mathbf{S}(0,\ 0,\ 0)$

(3)　点 T を ℓ 上に，点 U は z 軸上にとるから (1) と同様にして実数 t，u を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{OT}}=(-t,\ 1-t,\ 0),\quad \overrightarrow{\mathrm{OU}}=(0,\ 0,\ u)$$

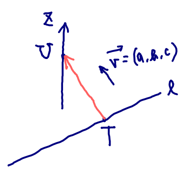
$$\overrightarrow{\mathrm{TU}}=(t,\ t-1,\ u)$$

(1) で P を T (p を t)
Q を U (q を u)

$\vec{v}=(a,\ b,\ c)$ は $\vec{0}$ ではないので　$(a,\ b,\ c)\neq(0,\ 0,\ 0)$ ← $\vec{v}\neq\vec{0}$

$$\overrightarrow{\mathrm{RS}}=\left(\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2},\ 0\right)$$

← (2) で R, S は求めた！



$\vec{v}\perp\overrightarrow{\mathrm{RS}}$ ではないので　$\vec{v}\cdot\overrightarrow{\mathrm{RS}}=\frac{1}{2}(a-b)\neq 0\qquad \therefore\ a\neq b$ ← 内積が0でない

$\overrightarrow{\mathrm{TU}}\,/\!\!/\,\vec{v}$ となるとき，実数 m を用いて

平行なので実数倍

$$\overrightarrow{\mathrm{TU}}=m\vec{v}\quad \text{すなわち}\quad (t,\ t-1,\ u)=(ma,\ mb,\ mc)$$

$$\begin{cases} t = ma & \cdots\cdots① \\ t-1 = mb & \cdots\cdots② \\ u = mc & \cdots\cdots③ \end{cases}$$

①－② として　$1 = m(a-b)$

$a-b \neq 0$ であるから $m = \dfrac{1}{a-b}$

①，③ より　$t = \dfrac{a}{a-b}$，$u = \dfrac{c}{a-b}$

よって　$\mathbf{T}\left(-\dfrac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}}, -\dfrac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}}, \mathbf{0}\right)$，$\mathbf{U}\left(\mathbf{0}, \mathbf{0}, \dfrac{\boldsymbol{c}}{\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}}\right)$

T$(-t, 1-t, 0)$，U$(0, 0, u)$
より　t と u を a と b で表す!