以下の問に答えよ．

(1)　和が 30 になる 2 つの自然数からなる順列の総数を求めよ．

(2)　和が 30 になる 3 つの自然数からなる順列の総数を求めよ．

(3)　和が 30 になる 3 つの自然数からなる組合せの総数を求めよ．

〔2020　神大 前期〕

〔解答例〕

(1)　和が 30 になる 2 つの自然数からなる順列は

$$(1,\ 29),\ (2,\ 28),\ \cdots,\ (29,\ 1)$$

よって，総数は **29**

(2)　和が 30 になる 3 つの自然数からなる順列の総数は

$$x + y + z = 30$$

を満たす自然数の組 $(x,\ y,\ z)$ の数である．

30 個の○とその間の 29 か所のうちの 2 か所に仕切りを入れることを考えて

$${}_{29}\mathrm{C}_2 = \mathbf{406}$$

(2)

○∧○∧○∧ ⋯ ∧○∧○

∧に 2つの || を入れる

例 $\underbrace{○○}_{2個}|\underbrace{○○\cdots○}_{15個}|\underbrace{○○\cdots○}_{13個}|$

ならば

$(x, y, z) = (2, 15, 13)$

(3)　和が 30 になる 3 つの自然数からなる組合せの総数について

あ 3 つとも同じ自然数の組み合わせは

$$\{10,\ 10,\ 10\}\ の\ 1(個)$$

← 10 + 10 + 10 = 30

い 3 つのうち 2 つだけが同じ自然数の組み合わせは

$$\{1,\ 1,\ 28\},\ \{2,\ 2,\ 26\},\ \cdots\{14,\ 14,\ 2\}\ の\ 14 - 1 = 13(個)$$

{10, 10, 10}は含めない

1 + 1 + 28 = 30
2 + 2 + 26 = 30
⋮
10 + 10 + 10 = 30 ← あより除く
⋮
14 + 14 + 2 = 30

う 3 つが相異なる自然数の組み合わせは

(2) で あ，い の場合を除き順番を考えないことから

$$\frac{406 - 1 - 13 \times 3}{3!} = \frac{366}{6} = 61\ (個)$$

よって，あ，い，う より求める総数は　$1 + 13 + 61 = \mathbf{75}$

組合せの3数は順を考えない

例 (2) で
(2, 13, 15)
(2, 15, 13)
(13, 2, 15)
(15, 2, 13)
(13, 15, 2)
(15, 13, 2)
3! = 6 (通り)

は 組合せだと
{2, 13, 15}
の 1(通り) となる

い の {1, 1, 28} は (2) の順列では
(1, 1, 28)
(1, 28, 1)
(28, 1, 1)
3(通り)