n を 2 以上の整数とする．2 個のさいころを同時に投げるとき，出た目の数の積を n で割った余りが 1 となる確率を P_n とする．以下の問に答えよ．

(1)　P_2，P_3，P_4 を求めよ．

(2)　$n \geqq 36$ のとき，P_n を求めよ．

(3)　$P_n = \dfrac{1}{18}$ となる n をすべて求めよ．

〔2019　神大 理系 前期〕

〔解答例〕

同時に投げる 2 個のサイコロの目を a，b とすると組 (a, b) の決め方は 36（通り）

出た目の積 ab を n で割ったときの余りが 1 となる条件は

$ab-1$ が n の倍数になることである．

← 余り 1 よりも n の倍数の方が考えやすい！

商を q として

$ab = nq + 1$

$\Leftrightarrow ab - 1 = nq$

$ab-1$ は n の倍数となり

n は $ab-1$ の約数になる ← (3) で使う！

$ab-1$ の値は次のような 36（通り）になる．

a \ b	1	2	3	4	5	6
1	0	1	2	3	4	5
2	1	3	5	7	9	11
3	2	5	8	11	14	17
4	3	7	11	15	19	23
5	4	9	14	19	24	29
6	5	11	17	23	29	35

← 36(通り) しかないので 書き出すとよい

(1)　$ab-1$ が 2 の倍数になるのは $ab-1=0, 2, 4, 8, 14, 24$ であるから，

← ab が奇数 つまり a と b がともに奇数の確率

組 (a, b) は 9（通り）　← $(a,b)=(1,1),(1,3),(1,5),(3,1),(3,3),(3,5),(5,1),(5,3),(5,5)$

よって　$\boldsymbol{P_2 = \dfrac{9}{36} = \dfrac{1}{4}}$

$ab-1$ が 3 の倍数になるのは $ab-1=0, 3, 9, 15, 24$ であるから，

組 (a, b) は 8（通り）　← $(a,b)=(1,1),(1,4),(2,2),(2,5),(4,1),(4,4),(5,2),(5,5)$

よって　$\boldsymbol{P_3 = \dfrac{8}{36} = \dfrac{2}{9}}$

$ab-1$ が 4 の倍数になるのは $ab-1=0, 4, 8, 24$ でであるから，

組 (a, b) は 5（通り）　← $(a,b)=(1,1),(1,5),(3,3),(5,1),(5,5)$

よって　$\boldsymbol{P_4 = \dfrac{5}{36}}$

(2)　$n \geqq 36$ のとき，$ab-1$ が n の倍数になるのは $ab-1=0$ のみであるから

組 (a, b) は 1（通り）

$0 \leqq ab-1 \leqq 35$

よって　$\boldsymbol{P_n = \dfrac{1}{36}\ (n \geqq 36)}$

(3)　(1)，(2) より $n = 2, 3, 4$, $n \geqq 36$ ならば $P_n \neq \dfrac{1}{18}$

$P_n = \dfrac{1}{18}$ となる n は $5 \leqq n \leqq 35$　を満たす．

$P_n = \dfrac{1}{18} = \dfrac{2}{36}$ であるから，求める n は $ab-1$ が n の倍数になる組 (a, b) がちょうど 2(通り）になる n である．

$(a,b)=(1,1)$，$(\square, \triangle)$ の 2(通り) のみとなる

$(a, b) = (1, 1)$ ならば $ab-1=0$ は必ず n の倍数になるから，上の表で $ab-1$ が 0 以外の n の倍数となる数が 1 つだけ出てくるものを考える．

例 $a \neq b$ とすると $(a,b)=(3,4),(4,3)$ のように 2(通り) 出てしまう

$a \neq b$ とすると (a, b) は $(1, 1)$ 以外で 2（通り）出てくるので不適である．

$a = b$ とすると $ab-1 = a^2-1$ が n の倍数になる組 (a, b) が $(1, 1)$ 以外の 1(通り) だけになることを考えると

$(a,b)=(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6)$ の場合にしぼられる

a^2-1 の値が $3^2-1=8$, $4^2-1=15$, $5^2-1=24$, $6^2-1=35$ の約数になることが必要で $n=5, 6, 7, 8, 12, 15, 24, 35$ ← n は $ab-1$ の約数で $5 \leqq n \leqq 35$

これらの n の倍数で $ab-1$ の値が 0 以外のひとつだけになるものは $n=6, 12, 15, 24, 35$

よって $P_n = \dfrac{1}{18}$ となる n は $\boldsymbol{n = 6, 12, 15, 24, 35}$ ← みつけたもん勝ち!?

補

$n=6$ のとき $ab-1=0,\ 24$

$(a, b) = (1, 1), (5, 5)$

$n=5$ のとき $ab-1=0,\ 15,\ 35$

$(a, b) = (1, 1), (4, 4), (6, 6)$

より不適

$n=12$ のとき $ab-1=0,\ 24$

$(a, b) = (1, 1), (5, 5)$

$n=15$ のとき $ab-1=0,\ 15$

$(a, b) = (1, 1), (4, 4)$

$n=24$ のとき $ab-1=0,\ 24$

$(a, b) = (1, 1), (5, 5)$

$n=35$ のとき $ab-1=0,\ 35$

$(a, b) = (1, 1), (6, 6)$