以下の問に答えよ．

(1)　関数
$$f(x)=\frac{\log x}{x}$$
の $x>0$ における最大値とそのときの x の値を求めよ．

(2)　a を $a\neq 1$ をみたす正の実数とする．曲線 $y=e^x$ と曲線 $y=x^a$ $(x>0)$ が共有点 P をもち，さらに点 P において共通の接線をもつとする．点 P の x 座標を t とするとき，a と t の値を求めよ．

(3)　a と t を (2) で求めた実数とする．x を $x\neq t$ をみたす正の実数とするとき，e^x と x^a の大小を判定せよ．

〔2019　神大 理系 前期〕

〔解答例〕

(1)　$f(x)=\dfrac{\log x}{x}$ より　$f'(x)=\dfrac{1-\log x}{x^2}$

よって，右の増減表より **最大値は $\boldsymbol{\frac{1}{e}}$ $\boldsymbol{(x=e)}$**

x	(0)	$\cdots$	e	$\cdots$	(∞)
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$(-\infty)$	$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$	(0)

(2)　$g(x)=e^x$，$h(x)=x^a$ $(x>0)$ とおくと

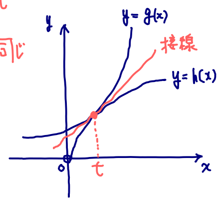
$g'(x)=e^x$，$h'(x)=ax^{x-1}$

$y=g(x)$ と $y=h(x)$ が共有点 P をもち，さらに点 P において共通接線をもち，点 P の x 座標を t とするので，$t>0$ のもとで

$$\begin{cases} g(t)=h(t) \\ g'(t)=h'(t) \end{cases} \quad \text{すなわち} \quad \begin{cases} e^t=t^a & \cdots\cdots① \\ e^t=at^{a-1} & \cdots\cdots② \end{cases}$$

← y座標が同じ

← 接線の傾きが同じ



① = ② として　$t^a=at^{a-1}$　すなわち　$t^{a-1}(t-a)=0$

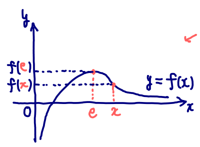
$t^{a-1}>0$ であるから　$t=a$

① へ代入して　$e^a=a^a$　　$\therefore a=e$

よって　$\boldsymbol{a=e,\ t=e}$

(3)　$x>0$，$x\neq e$ のとき (1) から　$f(e)>f(x)$

← グラフは(1)の増減表参



これより　$\dfrac{\log e}{e}>\dfrac{\log x}{x}$　すなわち　$\log e^x>\log x^e$

よって　$\boldsymbol{e^x>x^e}$

別　$\log e^x-\log x^e=x-e\log x=ex\left(\dfrac{1}{e}-\dfrac{\log x}{x}\right)=\underbrace{ex}_{\oplus}\left\{\dfrac{1}{e}-f(x)\right\}>0$

(1)から　x>0における f(x)の最大値は $\frac{1}{e}$ より

$\frac{1}{e}>f(x)$

補　$e^x>x^e$

$\Leftrightarrow \log e^x>\log x^e$

$\Leftrightarrow x\log e>e\log x$

$\Leftrightarrow \dfrac{\log e}{e}>\dfrac{\log x}{x}$

$\Leftrightarrow f(e)>f(x)$