t を $0<t<1$ を満たす実数とする．OABC を 1 辺の長さが 1 の正四面体とする．辺 OA を $1-t:t$ に内分する点を P，辺 OB を $t:1-t$ に内分する点を Q，辺 BC の中点を R とする．また $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とする．以下の問に答えよ．

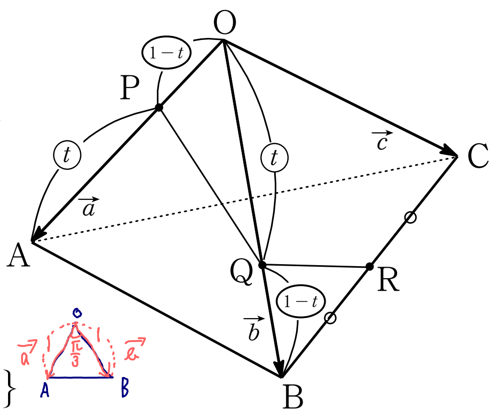
(1)　$\overrightarrow{\mathrm{QP}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{QR}}$ を t，$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ．

(2)　$\angle\mathrm{PQR}=\dfrac{\pi}{2}$ のとき，t の値を求めよ．

(3)　t が (2) で求めた値をとるとき，△PQR の面積を求めよ．

〔2018　神大 前期〕

〔解答例〕



(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(1-t)\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=t\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\dfrac{1}{2}\vec{b}+\dfrac{1}{2}\vec{c}$

$$\overrightarrow{\mathrm{QP}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\boldsymbol{(1-t)\vec{a}-t\vec{b}}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{QR}}=\overrightarrow{\mathrm{OR}}-\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\boldsymbol{\left(\frac{1}{2}-t\right)\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}}$$

始点をOに

(2)　四面体 OABC は一辺の長さが 1 の正四面体であるから

4つの面は一辺の長さが1の正三角形

$$|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=1$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}=1\cdot1\cdot\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{QP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{QR}}=\frac{1}{2}\{(1-t)\vec{a}-t\vec{b}\}\cdot\{(1-2t)\vec{b}+\vec{c}\}$$

$$=\frac{1}{2}\{(1-t)(1-2t)\vec{a}\cdot\vec{b}+(1-t)\vec{a}\cdot\vec{c}-t(1-2t)|\vec{b}|^2-t\vec{b}\cdot\vec{c}\}$$

$$=\frac{1}{4}(6t^2-7t+2)$$

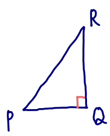
$$=\frac{1}{4}(2t-1)(3t-2)$$

$\angle\mathrm{PQR}=\dfrac{\pi}{2}$　のとき　$\overrightarrow{\mathrm{QP}}\perp\overrightarrow{\mathrm{QR}}$　つまり $\overrightarrow{\mathrm{QP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{QR}}=0$　← 2つのベクトル $\overrightarrow{\mathrm{QP}}$, $\overrightarrow{\mathrm{QR}}$ は垂直なので内積が0

よって　$\boldsymbol{t=\dfrac{1}{2},\ \dfrac{2}{3}}$　← t は 2つある

(3)　∠PQR は $\angle\mathrm{PQR}=\dfrac{\pi}{2}$ の直角三角形である．

△PQR の面積を S とすると　$S=\dfrac{1}{2}\left|\overrightarrow{\mathrm{QP}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{QR}}\right|$



(あ) $t=\dfrac{1}{2}$ のとき

$$\overrightarrow{\mathrm{QP}}=\frac{1}{2}(\vec{a}-\vec{b})=\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{BA}}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{QR}}=\frac{1}{2}\vec{c}$$

これより　$\left|\overrightarrow{\mathrm{QP}}\right|=\dfrac{1}{2}\left|\overrightarrow{\mathrm{BA}}\right|=\dfrac{1}{2}$，$\left|\overrightarrow{\mathrm{QR}}\right|=\dfrac{1}{2}|\vec{c}|=\dfrac{1}{2}$

ゆえに　$S=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{8}$

(い) $t=\dfrac{2}{3}$ のとき

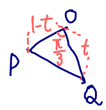
$$\overrightarrow{\mathrm{QP}}=\frac{1}{3}(\vec{a}-2\vec{b})$$

$$\overrightarrow{\mathrm{QR}}=-\frac{1}{6}(\vec{b}-3\vec{c})$$

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{QP}}\right|^2=\frac{1}{9}(|\vec{a}|^2-4\vec{a}\cdot\vec{b}+4|\vec{b}|^2)=\frac{1}{3}$$

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{QR}}\right|^2=\frac{1}{36}(|\vec{b}|^2-6\vec{b}\cdot\vec{c}+9|\vec{c}|^2)=\frac{7}{36}$$

別　△OPQ に余弦定理を用いて



$PQ^2=(1-t)^2+t^2-2(1-t)t\cos\frac{\pi}{3}$

$=3t^2-3t+1$

$t=\frac{2}{3}$ として

$PQ^2=3\cdot\frac{4}{9}-3\cdot\frac{2}{3}+1$

$=\frac{1}{3}$

　　これより　$\left|\overrightarrow{\mathrm{QP}}\right| = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$，$\left|\overrightarrow{\mathrm{QR}}\right| = \dfrac{\sqrt{7}}{6}$

　　ゆえに　$S = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{3}} \cdot \dfrac{\sqrt{7}}{6} = \dfrac{\sqrt{21}}{36}$

よって，あ，い より △PQR の面積は

$$\begin{cases} \boldsymbol{\dfrac{1}{8}} & \boldsymbol{\left(t = \dfrac{1}{2}\right)} \\ \boldsymbol{\dfrac{\sqrt{21}}{36}} & \boldsymbol{\left(t = \dfrac{2}{3}\right)} \end{cases}$$

← 答えは2つ