$i = \sqrt{-1}$ とする．以下の問に答えよ．

(1)　実数 α, β について，

$$(\cos\alpha + i\,\sin\alpha)(\cos\beta + i\,\sin\beta) = \cos(\alpha+\beta) + i\,\sin(\alpha+\beta)$$

が成り立つことを示せ．

(2)　自然数 n に対して，

$$z = \sum_{k=1}^{n}\left(\cos\frac{2\pi k}{n} + i\,\sin\frac{2\pi k}{n}\right)$$

とおくとき，等式

$$z\left(\cos\frac{2\pi}{n} + i\,\sin\frac{2\pi}{n}\right) = z$$

が成り立つことを示せ．

(3)　2 以上の自然数 n について，等式

$$\sum_{k=1}^{n}\cos\frac{2\pi k}{n} = \sum_{k=1}^{n}\sin\frac{2\pi k}{n} = 0$$

が成り立つことを示せ．

〔2011　神大 理系 前期〕

〔解答例〕

(1)　(左辺) $= (\cos\alpha + i\,\sin\alpha)(\cos\beta + i\,\sin\beta)$　展開

$$= \cos\alpha\cos\beta + i\cos\alpha\sin\beta + i\sin\alpha\cos\beta + i^2\sin\alpha\cos\beta$$

$$= (\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta) + i(\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta)$$

$$= \cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta)\ \ (\because\ \text{加法定理})$$

よって，示された．

(2)　$\theta = \dfrac{2\pi}{n}$　とすると　$n\theta = 2\pi$　← このようにおくと考えやすい

$a_k = \cos k\theta + i\sin k\theta$

とおくと

$$z = \sum_{k=1}^{n}\underbrace{\left(\cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}\right)}_{a_k}$$

$$= a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

$$\cos\frac{2\pi k}{n} + i\,\sin\frac{2\pi k}{n} = \cos k\theta + \sin k\theta = a_k$$

これより　$z = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$

$$(\text{左辺}) = z\left(\cos\frac{2\pi}{n} + i\,\sin\frac{2\pi}{n}\right) = \sum_{k=1}^{n}(\cos k\theta + i\sin k\theta)(\cos\theta + i\sin\theta)$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\{\cos(k+1)\theta + i\sin(k+1)\theta\}\quad(\because (1))$$

$$= \sum_{k=1}^{n} a_{k+1}$$

$$= a_2 + a_3 + \cdots + a_n + a_{n+1}$$

$$a_2 + a_3 + \cdots + a_n + a_{n+1}\ \ (a_{n+1} \to a_1)$$

ここで　$a_{n+1} = \cos(n+1)\theta + i\sin(n+1)\theta = \cos(n\theta+\theta) + i\sin(n\theta+\theta)$

$$= \cos(2\pi+\theta) + i\sin(2\pi+\theta) = \cos\theta + i\sin\theta$$

$$= a_1$$

よって　(左辺) $= a_1 + a_2 + \cdots + a_n = z$　であるから示された．

(3)　(2) より　$z(\cos\theta + i\sin\theta) = z$　すなわち　$z(\cos\theta + i\sin\theta - 1) = 0$

(2)の結果は z でくくって整理できる

$z=0$　または　$\underbrace{\cos\theta + i\sin\theta = 1}_{\cos\theta \neq 1 \text{ より不適}}$

ここで　$n \geqq 2$ より　$0 < \dfrac{2\pi}{n} \leqq \pi$

つまり　$0 < \theta \leqq \pi$　であるから　$\cos\theta \neq 1$

これより　$\cos\theta + i\sin\theta \neq 1$　であるから　$z = 0$

$$\therefore \sum_{k=1}^{n} \cos k\theta + i \sum_{k=1}^{n} \sin k\theta = 0$$

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \cos k\theta$，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sin k\theta$　は実数であるから　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \cos k\theta = 0$ かつ $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sin k\theta = 0$

よって，示された．

x, y が実数のとき

$x + yi = 0 \iff x = 0$ かつ $y = 0$