# 数学A　場合の数

~高校数学のまとめ~

教科書をもとに定義や定理を独自にパネル形式でまとめています．
何度も書き直し，加筆修正を繰り返しており，完成したものではありません．
人によっては不要な部分もあるでしょう．そういうときは読み飛ばしてください．

## 有限集合と無限集合

1 要素の個数が有限である集合を 有限集合（ゆうげんしゅうごう）という．

2 要素の個数が無限にある集合を 無限集合（むげんしゅうごう）という．

例 1 $\{x \mid x$ は 3 以下の自然数 $\} = \{1, 2, 3\}$ は要素が 3 個で有限なので有限集合である．

2 $\{x \mid x$ は自然数 $\} = \{1, 2, 3, 4, \cdots\}$ は要素が無限にあるので無限集合である．

## 有限集合の要素の個数

有限集合の要素の個数を $n(A)$ と表す．

とくに 空集合 $\varnothing$ は要素をもたないから $n(\varnothing) = 0$

例 $A = \{x \,|\, x$ は 3 以下の自然数 $\} = \{1, 2, 3\}$ は要素が 3 個なので，$n(A) = 3$

## 2 つの集合の和集合の要素の個数

有限集合 $A$，$B$ に対し

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

とくに $A \cap B = \varnothing$ のときは

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B)$$

**3 つの集合の和集合の要素の個数**

有限集合 $A$，$B$，$C$ に対し

$n(A\cup B\cup C)$

$=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(B\cap C)-n(C\cap A)+n(A\cap B\cap C)$

**補集合の要素の個数**

全体集合 $U$ とその部分集合 $A$ に対し

$\boxed{1}$ $n(A)+n(\overline{A})=n(U)$

$\boxed{2}$ $n(\overline{A})=n(U)-n(A)$

**ド・モルガンの法則と集合の要素の個数**

全体集合 $U$ とその部分集合 $A$，$B$ に対し

$\boxed{1}$ $n(\overline{A}\cap\overline{B})=n(\overline{A\cup B})=n(U)-n(A\cup B)$

$\boxed{2}$ $n(\overline{A}\cup\overline{B})=n(\overline{A\cap B})=n(U)-n(A\cap B)$

**場合の数**

ある事柄（ことがら）について，起こりうるすべての場合の総数を **場合の数**（ばあいのかず）という．

**和の法則**

2 つの事柄 $A$ と $B$ について，これらは同時に起こらないとする．

$A$ の起こり方が $a$ 通り，$B$ の起こり方が $b$ 通りあるとき

$A$ または $B$ の起こる場合の数は $a+b$ 通り

これを **和の法則**（わのほうそく）という．

この法則は 3 つ以上の事柄についても同じように成り立つ．

**要**

基本的に 「または」の結び，場合分けは **たし算**

**積の法則**

2 つの事柄 $A$ と $B$ について

$A$ の起こり方が $a$ 通りあり，その各々(おのおの)の起こり方に対して

$B$ の起こり方が $b$ 通り あるとき

$A$，$B$ がともに起こる場合の数は $a \times b$ 通り

これを **積(せき)の法則(ほうそく)** という．

この法則は 3 つ以上の事柄についても同じように成り立つ．

**要**

基本的に「かつ」の結び，連続操作 は **かけ算**

**数え上げの原則**

場合の数を求めるとき，次のような原則がある．

1. 樹形図や表などを活用し，規則的に配列するなど工夫して数える
2. ある原則を決め，その原則にしたがって整理して考える
3. 条件の強い所から考えて積の法則を利用する
4. 一度に数えきれないときは，場合分けをして和の法則を利用する
5. 直接数えるのが大変なときは，それ以外を考えて全体から引く

## 階乗

1 から $n$ までの自然数の積を $n$ の階乗（かいじょう）といい $n!$ と表す.

つまり　$n! = n(n-1)(n-2)\cdot\cdots\cdot 3\cdot 2\cdot 1$

また 特別な場合として $0!=1$ と定める.

例
$0! = 1$
$1! = 1$
$2! = 2\cdot 1 = 2$
$3! = 3\cdot 2\cdot 1 = 6$
$4! = 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 24$
$5! = 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 120$
$6! = 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 720$
$7! = 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 5040$
$8! = 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 40320$
$9! = 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 362880$
$10! = 10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 3628800$

## 階乗の変形

$\boxed{1}$ $n$ を自然数とするとき

$$n! = n\cdot(n-1)!$$

$\boxed{2}$ $n$ を 2 以上の自然数とするとき

$$n! = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)!$$

例 $\boxed{1}$ $5! = 5\cdot 4!$
$\boxed{2}$ $5! = 5\cdot 4\cdot 3!$

**順列**

いくつかのものを順序（じゅんじょ）を考えに入れて1列に並べたものを **順列**（じゅんれつ） という.
異なる $n$ 個のものから異なる $r$ 個を取り出して並べる順列を
$n$ 個から $r$ 個取る順列 といい，その総数を ${}_n\mathrm{P}_r$ と表す.

㊟補 ${}_n\mathrm{P}_r$ の P は順列を意味する Permutation の頭文字である.

**${}_n\mathrm{P}_r$ の計算**

$n$ を自然数，$r$ を $0 \leqq r \leqq n$ となる整数とするとき

$$
\begin{aligned}
{}_n\mathrm{P}_r &= \underbrace{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}_{r\text{ 個}} \\
&= \frac{n!}{(n-r)!}
\end{aligned}
$$

とくに

$r=n$ のとき ${}_n\mathrm{P}_n = n!$

$r=0$ のとき ${}_n\mathrm{P}_0 = 1$

㊕例 ${}_7\mathrm{P}_3 = \underbrace{7\cdot6\cdot5}_{3\text{ 個}} = \dfrac{7!}{4!} = 210$

### 円順列

いくつかのものを順序を考えに入れて円形に並べたものを **円順列**（えんじゅんれつ）という．

回転して同じになるものは同じ並べ方とみなす．

### 円順列の総数

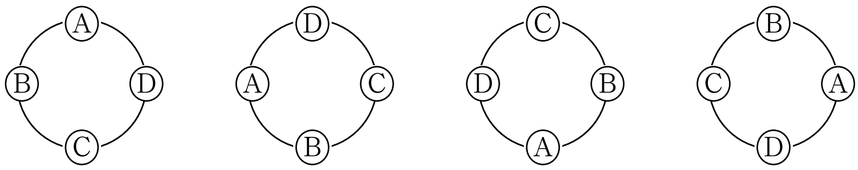
異なる $n$ 個の円順列の総数は

$$(n-1)!$$

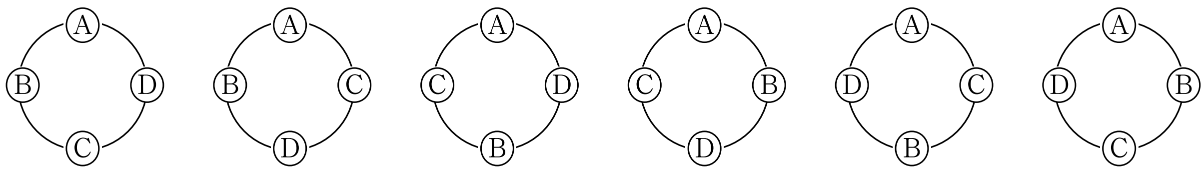
考 1 個を固定して残り $(n-1)$ 個を並べることを考える．

例 A，B，C，D の 4 人を円形に並べる総数について

次のような場合は回転すると同じになることに注意する．




そこで A を固定して残り B，C，D の 3 人を並べると次のようになる．




これらは回転しても同じにならないので円順列の総数になる．

よって 4 人のうち 1 人を固定して残り 3 人を並べることから

$$(4-1)! = 3! = 6 \text{（通り）}$$

**数珠順列**

いくつかのものを順序を考えに入れて数珠形に並べたものを

**数珠順列**（じゅずじゅんれつ）という．

回転，あるいは表裏をかえて同じになるものは同じ並べ方とみなす．

㊟ 数珠はペンダントやネックレスでも同じ．

**数珠順列の総数**

異なる $n$ 個の数珠順列の総数は

$$\frac{(n-1)!}{2}$$

考 まず円順列を考え，線対称になるものは表裏をかえると同じになるので 2 でわる．

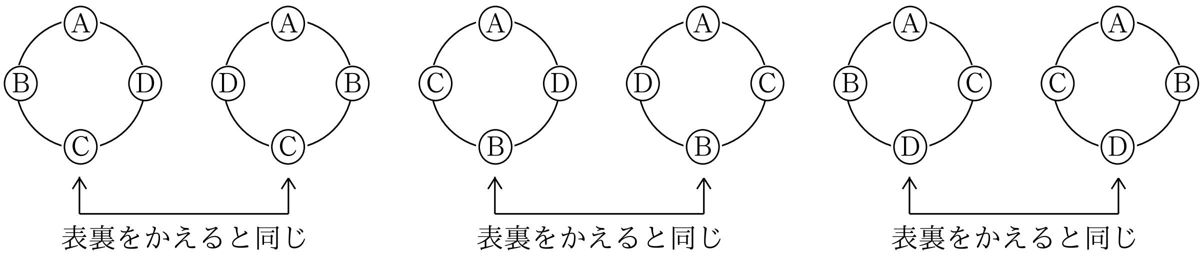
例 A，B，C，D の 4 個を数珠形に並べる総数について

まず A を固定して円形に並べると，下のように $(4-1)!=3!=6$（通り）

左の 2 つは Ⓐ と Ⓒ を結ぶ直線に関して対称だから表裏をかえると同じ並べ方になる．

そのように 2 組ずつ同じ並べ方になる．

よって $\dfrac{(4-1)!}{2}=3$（通り）



**重複順列**

異なる $n$ 個のものから，繰り返し用いることを許して

$r$ 個を取って並べる順列を，$n$ 個から $r$ 個取る **重複順列**（ちょうふくじゅんれつ） という.

**重複順列の総数**

異なる $n$ 個から $r$ 個取る重複順列の総数は

$$\underbrace{n \times n \times \cdots \times n}_{r\text{ 個}} = n^r$$

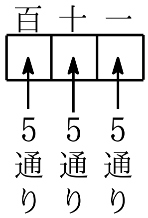
㊄ 異なる 5 個から 3 個とる重複順列の総数は

$$\underbrace{5 \times 5 \times 5}_{3\text{ 個}} = 5^3 = 125$$

㊄ 1，2，3，4，5 の 5 個の数字から重複を許して 3 個の数字を取り出してつくられる 3 桁の整数の個数を求める.

百の位，十の位，一の位それぞれ 5 通りの決め方があるで

$$5 \times 5 \times 5 = 5^3 = 125\ (\text{個})$$



**組合せ**

いくつかのものを順序（じゅんじょ）を考えに入れないで取り出して 1 組にしたものを**組合せ**（くみあわせ）という．

異なる $n$ 個のものから異なる $r$ 個を取り出して作る組合せを

$n$ 個から $r$ 個取る組合せといい，その総数を ${}_n\mathrm{C}_r$ と表す．

㊟補 ${}_n\mathrm{C}_r$ の C は組合せを意味する Combination の頭文字である．

**${}_n\mathrm{C}_r$ の計算**

$n$ を自然数，$r$ を $0 \leqq r \leqq n$ となる整数とするとき

$$
\begin{aligned}
{}_n\mathrm{C}_r &= \frac{\overbrace{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}^{r\text{ 個}}}{r!} \\
&= \frac{n!}{r!(n-r)!} \\
&= \frac{{}_n\mathrm{P}_r}{r!}
\end{aligned}
$$

とくに

$r = n$ のとき ${}_n\mathrm{C}_n = 1$

$r = 0$ のとき ${}_n\mathrm{C}_0 = 1$

㊟例 ${}_7\mathrm{C}_3 = \dfrac{\overbrace{7\cdot 6\cdot 5}^{3\text{ 個}}}{3!} = \dfrac{7!}{3!4!} = \dfrac{{}_7\mathrm{P}_3}{3!} = 35$

㊟考 異なる $n$ 個のものから異なる $r$ 個取り出し，その $r$ 個を 1 列に並べる総数を考えて

$${}_n\mathrm{C}_r \times r! = {}_n\mathrm{P}_r$$

## ${}_n\mathrm{C}_r$ の性質

$\boxed{1}$ $n$ を自然数，$r$ を $0 \leqq r \leqq n$ となる整数とするとき

$${}_n\mathrm{C}_r = {}_n\mathrm{C}_{n-r}$$

$\boxed{2}$ $n$ を 2 以上の自然数，$r$ を $1 \leqq r \leqq n-1$ となる整数とするとき

$${}_n\mathrm{C}_r = {}_{n-1}\mathrm{C}_{r-1} + {}_{n-1}\mathrm{C}_r$$

例 $\boxed{1}$ ${}_7\mathrm{C}_5 = {}_7\mathrm{C}_2$

$\boxed{2}$ ${}_7\mathrm{C}_2 = {}_6\mathrm{C}_1 + {}_6\mathrm{C}_2$

考 $\boxed{1}$ 異なる $n$ 個のものから異なる $r$ 個を取り出すことと
取り出さない異なる $(n-r)$ 個を選ぶ場合の数は同じである．

$\boxed{2}$ 異なる $n$ 個のものから異なる $r$ 個を取り出す方法は ${}_n\mathrm{C}_r$（通り）

これを特定の 1 個を含むか含まないかで場合分けして

あ 特定の 1 個を含む場合は 異なる $(n-1)$ 個から $(r-1)$ 個を選ぶから
${}_{n-1}\mathrm{C}_{r-1}$（通り）

い 特定の 1 個を含まない場合は 異なる $n-1$ 個から $r$ 個を選ぶから
${}_{n-1}\mathrm{C}_r$（通り）

よって あ または い より ${}_n\mathrm{C}_r = {}_{n-1}\mathrm{C}_{r-1} + {}_{n-1}\mathrm{C}_r$

考 $\boxed{2}$

$$\begin{aligned}
{}_n\mathrm{C}_r = \frac{n!}{r!(n-r)!} &= \frac{n\cdot(n-1)!}{r!(n-r)!} \\
&= \frac{\{r+(n-r)\}\cdot(n-1)!}{r!(n-r)!} \\
&= \frac{r\cdot(n-1)!}{r\cdot(r-1)!(n-r)!} + \frac{(n-r)\cdot(n-1)!}{r!(n-r)\cdot(n-r-1)!} \\
&= \frac{(n-1)!}{(r-1)!(n-r)!} + \frac{(n-1)!}{r!(n-r-1)!} \\
&= {}_{n-1}\mathrm{C}_{r-1} + {}_{n-1}\mathrm{C}_r
\end{aligned}$$

## 組合せの関係式

$n$，$k$ を自然数，$1 \leqq k \leqq n$ のとき

$$k\,{}_n\mathrm{C}_k = n\,{}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1}$$

例 $3 \cdot {}_7\mathrm{C}_3 = 7 \cdot {}_6\mathrm{C}_2$

考 $n$ 人から $k$ 人選び，代表者を 1 人決める方法は

$${}_n\mathrm{C}_k \times {}_k\mathrm{C}_1 = k\,{}_n\mathrm{C}_k \text{（通り）} \cdots\cdots ①$$

$n$ 人から 1 人の代表者を決めて，$(n-1)$ 人から $(k-1)$ 人を選ぶ方法は

$${}_n\mathrm{C}_1 \times {}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1} = n\,{}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1} \text{（通り）} \cdots\cdots ②$$

① ＝ ② であるから $k\,{}_n\mathrm{C}_k = n\,{}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1}$

考

$$\begin{aligned} k\,{}_n\mathrm{C}_k &= k \cdot \frac{n!}{k!(n-k)!} \\ &= k \cdot \frac{n \cdot (n-1)!}{k \cdot (k-1)!(n-k)!} \\ &= n \cdot \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} \\ &= n\,{}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1} \end{aligned}$$

## 同じものを含む 2 個の順列

$\underbrace{\mathrm{AA\cdots A}}_{p\,個}\ \underbrace{\mathrm{BB\cdots B}}_{q\,個}$ の $(p+q)$ 個の順列の総数は

$$ {}_{p+q}\mathrm{C}_p = {}_{p+q}\mathrm{C}_q = \frac{(p+q)!}{p!q!} $$

考 $(p+q)$ 個の場所を設定し，$p$ 個を選んで A を並べ，残りに $q$ 個の B を並べる．
あるいは，$q$ 個を選んで B を並べ，残りに $p$ 個の A を並べる．
また，$(p+q)$ 個 をすべて異なるとして並べ，$p$ 個と $q$ 個の同じものの重複を考えて $p!q!$ でわる．

例 $\underbrace{\mathrm{AAA}}_{3\,個}\ \underbrace{\mathrm{BB}}_{2\,個}$ の 5 個の順列の総数は

右図のように 5 個を並べる場所を設定し，
5 個から 3 個選んで 3 つの A を並べ，
残り 2 個に 2 つの B を並べることを考えて

$$ {}_5\mathrm{C}_3 = \frac{5!}{3!2!} = 10\ (通り) $$

5 個

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | | | | |

5 個から 3 個選んで A を並べる

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| A | | A | A | |

残り 2 個に B を並べる

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| A | B | A | A | B |

別 5 個から 2 個選んで 2 つの B を並べ，
残り 3 個に 3 つの A を並べることを考えて

$$ {}_5\mathrm{C}_2 = \frac{5!}{3!2!} = 10\ (通り) $$

5 個から 2 個選んで B を並べる

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | B | | | B |

残り 3 個に A を並べる

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| A | B | A | A | B |

別 3 つの A，2 つの B を区別して $\mathrm{A}_1$，$\mathrm{A}_2$，$\mathrm{A}_3$，$\mathrm{B}_1$，$\mathrm{B}_2$ の 5 個を並べると

$$ 5! = 120\ (通り) $$

そのうち，例えば，$\mathrm{B}_1$，$\mathrm{B}_2$ を入れかえた $2!$(通り）の

$\mathrm{A_1B_1A_2A_3B_2}$
$\mathrm{A_1B_2A_2A_3B_1}$

について，どちらも ABAAB と同じ並べ方になる．
また，例えば，$\mathrm{A}_1$，$\mathrm{A}_2$，$\mathrm{A}_3$ を入れかえた $3!$(通り）の

$\mathrm{A_1B_1A_2A_3B_2}$
$\mathrm{A_1B_1A_3A_2B_2}$
$\mathrm{A_2B_1A_1A_3B_2}$
$\mathrm{A_2B_1A_3A_1B_2}$
$\mathrm{A_3B_1A_1A_2B_2}$
$\mathrm{A_3B_1A_2A_1B_2}$

について，いずれもいずれも ABAAB と同じ並べ方になる．
よって，$2!\times 3!$ (通り）は重複するので

$$ \frac{5!}{3!2!} = 10\ (通り) $$

補 10（通り）は次になる

AAABB
AABAB
AABBA
ABAAB
ABABA
ABBAA
BAAAB
BAABA
BABAA
BBAAA

**同じものを含む3個の順列**

$\underbrace{\mathrm{AA\cdots A}}_{p\text{ 個}}\ \underbrace{\mathrm{BB\cdots B}}_{q\text{ 個}}\ \underbrace{\mathrm{CC\cdots C}}_{r\text{ 個}}$ の $(p+q+r)$ 個の順列の総数は

$$\frac{(p+q+r)!}{p!q!r!}$$

㊟ $(p+q+r)$ 個 をすべて異なるとして並べ，$p$ 個と $q$ 個と $r$ 個の同じものの重複を考えて $p!q!r!$ でわる．

㊝ $\underbrace{\mathrm{AAA}}_{3\text{ 個}}\underbrace{\mathrm{BB}}_{2\text{ 個}}\underbrace{\mathrm{CC}}_{2\text{ 個}}$ の 7 個の順列の総数は $\dfrac{7!}{3!2!2!}=210$（通り）

**同じものを含む順列**

同じものを含む順列の総数は次の手順で求めることができる．

$\boxed{1}$ 全部異なるものとして順列の総数 $N$ を求める

$\boxed{2}$ $N$ を同じものの個数の階乗で割る

㊝ $\underbrace{\mathrm{AAA}}_{3\text{ 個}}\underbrace{\mathrm{BB}}_{2\text{ 個}}\underbrace{\mathrm{CCCC}}_{4\text{ 個}}\mathrm{D}$ の 10 個の順列の総数を求める．

$\boxed{1}$ 10 個すべて異なるとして順列の総数を $N$ とすると

$N=10!$

$\boxed{2}$ 3 個と 2 個と 4 個の同じものの重複を考えて

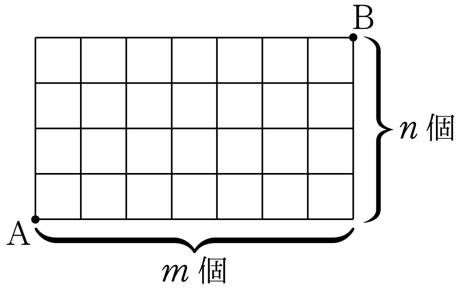
$\dfrac{N}{3!2!4!}=\dfrac{10!}{3!2!4!}=12600$（通り）

## 平面での最短経路の総数

右図のように $m \times n$ 個のマス目の道があるとき

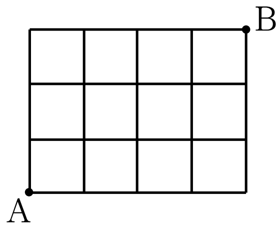
地点 A から地点 B への最短経路（さいたんけいろ）の総数は

$$\frac{(m+n)!}{m!n!} = {}_{m+n}\mathrm{C}_m = {}_{m+n}\mathrm{C}_n$$

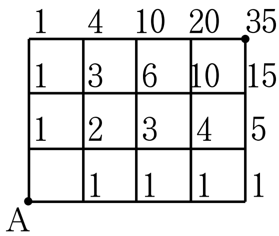



考 $\underbrace{xx\cdots\cdots x}_{m\text{ 個}}\underbrace{yy\cdots y}_{n\text{ 個}}$ の $(m+n)$ 個の文字の順列として考える．

例 地点 A から地点 B への最短距離で行く道順は
右に 4 回上に 3 回移動することより $\underbrace{xxxx}_{4\text{ 個}}\underbrace{yyy}_{3\text{ 個}}$ の
7 個の文字の順列に経路が対応する．
よって ${}_7\mathrm{C}_3 = \dfrac{7!}{4!3!} = \mathbf{35}$（通り）




別 場合の数を頂点の右上に直接書き込むと右のようになる．
よって **35**（通り）



## 区別があるものの区別のない組への組分け

区別があるものの区別のない組への組分けの総数は

基本的に次のような手順で求めることができる．

1 組に区別があるとして組分けの総数 $N$ を求める

2 $N$ を組に区別がないと同じ組分けになる組数の階乗で割る

考 同じものを含む順列と同じように考える．

組に区別があるとして組み分けをして，重複する組を考える．

例 6 個の異なるものを 2 個，2 個，2 個の 3 組に分ける総数は

$$\frac{{}_6\mathrm{C}_2 \cdot {}_4\mathrm{C}_2 \cdot {}_2\mathrm{C}_2}{3!} = \frac{90}{6} = 15\ (\text{通り})$$

例 $a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ f$ の 6 人を $\underbrace{2\text{ 人},\ 2\text{ 人},\ 2\text{ 人}}_{3\text{ 組}}$ の 3 組に分ける総数について

1 3 つの組を A 組，B 組，C 組と区別したときの組み分けの総数を $N$ とすると

A 組は 6 人から 2 人を選んで ${}_6\mathrm{C}_2$（通り）

B 組は A 組以外の 4 人から 2 人を選んで ${}_4\mathrm{C}_2$（通り）

C 組は残りの 2 人を選んで ${}_2\mathrm{C}_2$（通り）

これより $N = {}_6\mathrm{C}_2 \cdot {}_4\mathrm{C}_2 \cdot {}_2\mathrm{C}_2 = 15 \cdot 6 = 90$（通り）

2 $N$ のうち A 組，B 組，C 組を入れかえた 3!(通り）の

| A 組 | B 組 | C 組 |
|---|---|---|
| $a,\ b$ | $c,\ d$ | $e,\ f$ |
| $a,\ b$ | $e,\ f$ | $c,\ d$ |
| $c,\ d$ | $a,\ b$ | $e,\ f$ |
| $c,\ d$ | $e,\ f$ | $a,\ b$ |
| $e,\ f$ | $a,\ b$ | $c,\ d$ |
| $e,\ f$ | $c,\ d$ | $a,\ b$ |

について，いずれも $\{a,\ b\}$，$\{c,\ d\}$，$\{e,\ f\}$ の同じ組み分けになる．

よって，3!(通り）は重複するので

$$\frac{N}{3!} = \frac{90}{6} = 15\ (\text{通り})$$

**区別があるものの区別のある組への組分け**

区別がある $m$ 個のものを区別のある $n$ 組への組分けの総数は

何もない組があってもよいならば

$$n^m$$

例 異なる 6 個のものを 3 つの組 A，B，C に分ける方法は

1 個につき 3(通り) の分け方があるので

$3^6 = 729$ (通り)

**重複組合せ**

異なる $n$ 個のものから，繰り返し用いることを許して $r$ 個選ぶことを

$n$ 個から $r$ 個選ぶ **重複組合せ**（ちょうふくくみあわせ）という．

**重複組合せの総数**

異なる $n$ 個から $r$ 個選ぶ重複組合せの総数は

$$ {}_n\mathrm{H}_r = {}_{n+r-1}\mathrm{C}_r = \frac{(n+r-1)!}{(n-1)!r!} $$

これは $\underbrace{\bigcirc\bigcirc\cdots\bigcirc}_{r\text{ 個}}$, $\underbrace{|\,|\cdots|}_{(n-1)\text{ 個}}$ の順列の総数に等しい．

㊀ {A, B, C, D} の 4 個から 2 個選ぶ重複組合せの総数は

$$ {}_4\mathrm{H}_2 = {}_5\mathrm{C}_2 = 10 \text{（通り）} $$

すべて書き出すと

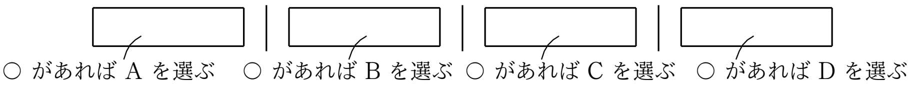
{A, A}, {B, B}, {C, C}, {D, D}, {A, B}

{A, C}, {A, D}, {B, C}, {B, D}, {C, D}

よって 10（通り）

これは $\underbrace{\bigcirc\bigcirc}_{2\text{ 個}}$, $\underbrace{|\,|\,|}_{3\text{ 個}}$ の順列の総数に等しい．

なぜなら，「｜」を仕切りとみて，3 つの仕切りで分けられた 4 つの部分を左から順に A，B，C，D を選ぶ部分と考える．○の数だけ選ぶ，○がないときは選ばないとする．




| 選ぶもの | 並べたもの |
|---|---|
| {A, A} | ○○｜｜｜ |
| {B, B} | ｜○○｜｜ |
| {C, C} | ｜｜○○｜ |
| {D, D} | ｜｜｜○○ |
| {A, B} | ○｜○｜｜ |
| {A, C} | ○｜｜○｜ |
| {A, D} | ○｜｜｜○ |
| {B, C} | ｜○｜○｜ |
| {B, D} | ｜○｜｜○ |
| {C, D} | ｜｜○｜○ |

## 区別がないものの区別のある組への組分け

区別のない $m$ 個のものを区別のある $n$ 組への組分けの総数は

$\boxed{1}$ 何もない組があってよいとき

$$x_1+x_2+\cdots+x_n=m\ (x_1\geqq 0,\ x_2\geqq 0,\ \cdots,\ x_n\geqq 0)$$

を満たす 整数の組 $(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)$ の組数に等しい．

すなわち ${}_n\mathrm{H}_m={}_{n+m-1}\mathrm{C}_{n-1}$

$\boxed{2}$ 何もない組があってはいけないとき

$$x_1+x_2+\cdots+x_n=m\ (x_1\geqq 1,\ x_2\geqq 1,\ \cdots,\ x_n\geqq 1)$$

を満たす 整数の組 $(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)$ の組数に等しい．

すなわち ${}_{m-1}\mathrm{C}_{n-1}$

考 $\underbrace{\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc}_{m\text{ 個}}$，$\underbrace{|\,|\cdots|}_{n-1\text{ 個}}$ の順列で，$|$ で分けられた○の数を $x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n$ に対応することを考える．

例 6 つの球を 3 人で分ける総数について

$\boxed{1}$ 何も分けられない人がいてもよいとき

3 人に分ける球の個数をそれぞれ $x,\ y,\ z$ として

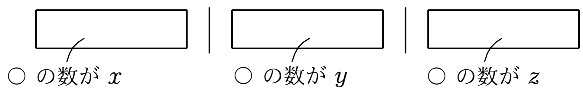
$$x+y+z=6\ (x\geqq 0,\ y\geqq 0,\ z\geqq 0)$$

を満たす整数の組 $(x,\ y,\ z)$ の組数に等しい．

これは 3 個のものから重複して 6 個選ぶ重複組み合せ，

つまり，$\underbrace{\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc}_{6\text{ 個}}$，$\underbrace{|\,|}_{2\text{ 個}}$ の順列より

$${}_3\mathrm{H}_6={}_8\mathrm{C}_6={}_8\mathrm{C}_2=28\ (\text{通り})$$




$\boxed{2}$ 何も分けられない人がいないとき

3 人に分ける球の個数をそれぞれ $x,\ y,\ z$ として

$$x+y+z=6\ (x\geqq 1,\ y\geqq 1,\ z\geqq 1)$$

を満たす整数の組 $(x,\ y,\ z)$ の組数に等しい．

これは 6 個の○の間 $\bigcirc_\wedge\bigcirc_\wedge\bigcirc_\wedge\bigcirc_\wedge\bigcirc_\wedge\bigcirc$ の 5 か所の $_\wedge$ のうち 2 か所に $|$ を入れる順列より

$${}_5\mathrm{C}_2=10\ (\text{通り})$$