次のように媒介変数表示された xy 平面上の曲線を C とする：

$$\begin{cases} x = 3\cos t - \cos 3t \\ y = 3\sin t - \sin 3t \end{cases}$$

ただし $0 \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{2}$ である．

（1）　$\dfrac{dx}{dt}$ および $\dfrac{dy}{dt}$ を計算し，C の概形を図示せよ．

（2）　C と x 軸と y 軸で囲まれた部分の面積を求めよ．

〔2016　東工大 前期〕

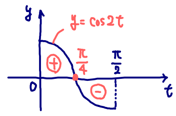
〔 解答例 〕

（1）
$$\frac{dx}{dt} = -3\sin t + 3\sin 3t = 3(\sin 3t - \sin t) = \boldsymbol{6\cos 2t \sin t}$$
$$\frac{dy}{dt} = 3\cos t - 3\cos 3t = -3(\cos 3t - \cos t) = \boldsymbol{6\sin 2t \sin t}$$

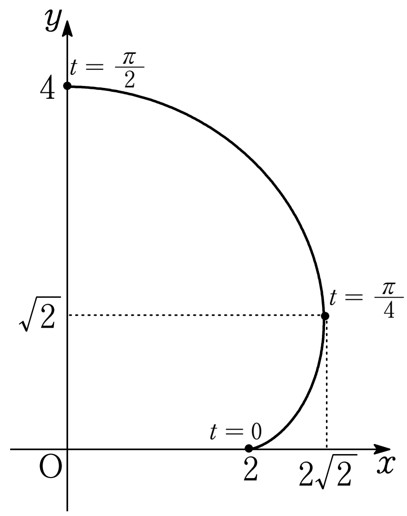
← 差を積にする公式
$\sin A - \sin B = 2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}$
$\cos A - \cos B = -2\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}$

$0 < t < \dfrac{\pi}{2}$ において $\dfrac{dx}{dt} = 0$ とすると $\sin t > 0$ より $\cos 2t = 0$ であるから $t = \dfrac{\pi}{4}$

$\sin 2t > 0,\ \sin t > 0$ であるから $\dfrac{dy}{dt} > 0$



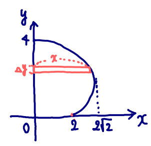
t	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{4}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
$\frac{dx}{dt}$	0	$+$	0	$-$	
x	2	$\rightarrow$	$2\sqrt{2}$	$\leftarrow$	0
$\frac{dy}{dt}$	0	$+$		$+$	0
y	0	$\uparrow$	$\sqrt{2}$	$\uparrow$	4
$(x,\ y)$	$(2,\ 0)$	$\nearrow$	$(2\sqrt{2},\ \sqrt{2})$	$\nwarrow$	$(0,\ 4)$



C の概形は右図．

（2）　C と x 軸と y 軸で囲まれた部分の面積を S とすると

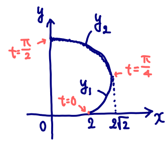
$\Delta S = \Delta y \times x = x\Delta y$
を $0 \leqq y \leqq 4$ で求積
yで積分！



$$S = \int_0^4 x\,dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\frac{dy}{dt}dt$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (3\cos t - \cos 3t)\cdot 3(\cos t - \cos 3t)\,dt$$
$$= 3\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(3\cos^2 t - 4\cos 3t\cos t + \cos^2 3t\right)dt$$
$$= 3\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{\frac{3}{2}(1+\cos 2t) - 2(\cos 4t + \cos 2t) + \frac{1+\cos 6t}{2}\right\}dt$$
$$= \frac{3}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos 6t - 4\cos 4t - \cos 2t + 4\right)dt$$
$$= \frac{3}{2}\left[\frac{\sin 6t}{6} - \sin 4t - \frac{\sin 2t}{2} + 4t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3}{2}\cdot 2\pi = \boldsymbol{3\pi}$$

〔別解例 1〕 xで積分!

$0 \leqq t \leqq \frac{\pi}{4}$ のときの y を y_1，$\frac{\pi}{4} < t \leqq \frac{\pi}{2}$ のときの y を y_2 とすると



$$S = \int_0^{2\sqrt{2}} y_2\,dx - \int_0^{2} y_1\,dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} y\,\frac{dx}{dt}dt - \int_0^{\frac{\pi}{4}} y\,\frac{dx}{dt}dt$$

$$= -\left(\int_0^{\frac{\pi}{4}} y\,\frac{dx}{dt}dt + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} y\,\frac{dx}{dt}dt\right) = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} y\,\frac{dx}{dt}dt$$

$$= -\int_0^{\frac{\pi}{2}} (3\sin t - \sin 3t)\cdot 3(\sin 3t - \sin t)\,dt$$

$$= 3\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(3\sin^2 t - 4\sin 3t\sin t + \sin^2 3t\right)dt$$

$$= 3\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{\frac{3}{2}(1-\cos 2t) + 2(\cos 4t - \cos 2t) + \frac{1-\cos 6t}{2}\right\}dt$$

$$= \frac{3}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(-\cos 6t + 4\cos 4t - 7\cos 2t + 4\right)dt$$

$$= \frac{3}{2}\left[-\frac{\sin 6t}{6} + \sin 4t - \frac{7}{2}\cos 2t + 4t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3}{2}\cdot 2\pi = \boldsymbol{3\pi}$$