曲線 $C : y=\sqrt{3}\,e\log x$ について考える．

(1)　原点 O から曲線 $C$ に引いた接線の方程式を求めよ．

(2)　(1) における接線の接点を A とする．曲線 $C$ の下側にあって，$x$ 軸と点 B で接し，かつ A で曲線 $C$ と共通の接線をもつ円の中心を P とする．曲線 $C$ と $x$ 軸および円の劣弧 AB で囲まれた図形の面積を求めよ．

〔 解答例 〕

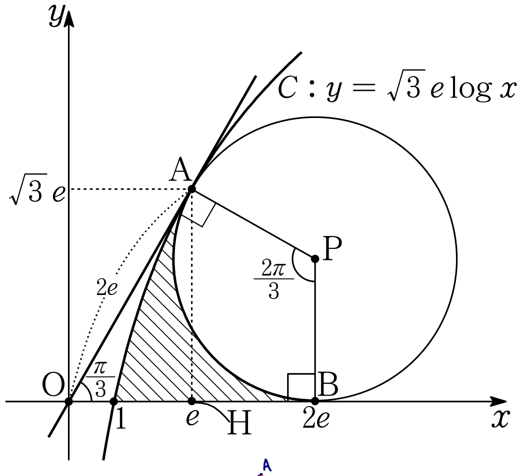
(1)　$C$ 上の点 $(t,\sqrt{3}\,e\log t)\ (t>0)$ における接線の方程式は $y'=\dfrac{\sqrt{3}\,e}{x}$ より

$$y=\frac{\sqrt{3}\,e}{t}(x-t)+\sqrt{3}\,e\log t$$

これが原点 O を通るので $0=-\sqrt{3}\,e+\sqrt{3}\,e\log t$

つまり $\log t=1$ であるから $t=e$ ← 接点Aのx座標

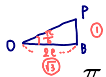
よって，求める接線の方程式は $\boldsymbol{y=\sqrt{3}\,x}$




(2)　接点 $\mathrm{A}(e,\sqrt{3}\,e)$

接線の傾きが $\sqrt{3}$ より $\angle\mathrm{AOB}=\dfrac{\pi}{3}$ ← $\tan\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$

$\mathrm{OA}=\mathrm{OB}=2e$ より $\mathrm{B}(2e,0)$



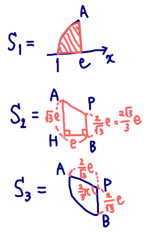
直線 OP は $\angle\mathrm{OAB}$ の二等分線より $\angle\mathrm{POB}=\dfrac{\pi}{6}$

これより $\mathrm{PB}=\dfrac{2e}{\sqrt{3}}$ ← 円の半径 であるから $\mathrm{P}\left(2e,\dfrac{2e}{\sqrt{3}}\right)$

曲線 $C$ と $x$ 軸，直線 $x=e$ で囲まれた図形の面積を $S_1$

$\mathrm{H}(e,0)$ として台形 AHBP の面積を $S_2$

半径 $\dfrac{2e}{\sqrt{3}}$，中心角 $\dfrac{2\pi}{3}$ の面積を $S_3$



とすると

$$S_1=\int_1^e\sqrt{3}\,e\log x\,dx=\Big[\sqrt{3}\,e(x\log x-x)\Big]_1^e=\sqrt{3}e\{0-(-1)\}=\sqrt{3}\,e$$

$$S_2=\frac{1}{2}(\mathrm{PB}+\mathrm{AH})\cdot\mathrm{BH}=\frac{1}{2}\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}e+\sqrt{3}\,e\right)\cdot e=\frac{5}{6}e^2$$

$$S_3=\frac{1}{2}\left(\frac{2e}{\sqrt{3}}\right)^2\cdot\frac{2}{3}\pi=\frac{4}{9}\pi e^2$$

よって，求める面積は

$$S_1+S_2-S_3=\boldsymbol{\sqrt{3}\,e+\frac{5\sqrt{3}}{6}e^2-\frac{4}{9}\pi e^2}$$