次の問いに答えよ．

(1)　$1 < m \leqq n$ を満たす自然数 $m,\ n$ に対し，次の不等式が成り立つことを証明せよ．

$$\int_m^{n+1} \frac{dx}{x} < \sum_{k=m}^{n} \frac{1}{k} < \int_m^{n+1} \frac{dx}{x-1}$$

(2)　$\displaystyle\sum_{k=1}^{2020} \frac{1}{k}$ の整数部分を求めよ．ただし，実数 x に対して a が x の整数部分であるとは，a が整数であって $a \leqq x < a+1$ が成り立つことをいう．また，正の実数 x の自然対数を $\log x$ とし，$\log 2 = 0.69$，$\log 3 = 1.10$，$\log 2020 = 7.61$ とする．

〔2020　大阪市大 理系 前期〕

〔 解答例 〕

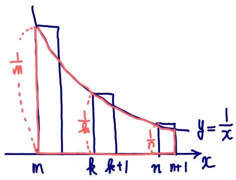
(1)　関数 $y = \dfrac{1}{x}$ は $x > 0$ において単調減少であるから，k を自然数として

$k < x < k+1$ のとき $\dfrac{1}{x} < \dfrac{1}{k}$ が成り立つから

$$\sum_{k=m}^{n} \int_k^{k+1} \frac{1}{x}\,dx < \sum_{k=m}^{n} \int_k^{k+1} \frac{1}{k}\,dx$$

すなわち $\displaystyle\int_m^{n+1} \frac{dx}{x} < \sum_{k=m}^{n} \frac{1}{k}$ ……Ⓐ

は成り立つ．

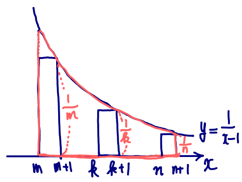


また $k < x < k+1$ のとき $\dfrac{1}{k} < \dfrac{1}{x-1}$ が成り立つから

$$\sum_{k=m}^{n} \int_k^{k+1} \frac{1}{k}\,dx < \sum_{k=m}^{n} \int_k^{k+1} \frac{1}{x-1}\,dx$$

すなわち $\displaystyle\sum_{k=m}^{n} \frac{1}{k} < \int_m^{n+1} \frac{dx}{x-1}$ ……Ⓑ

は成り立つ．



よって，Ⓐ，Ⓑ より示された．

(2)
$$\sum_{k=1}^{2020} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2000} + \sum_{k=3}^{2019} \frac{1}{k}$$
$$> \frac{3}{2} + \int_3^{2020} \frac{dx}{x} \quad (\because Ⓐ)$$
$$= \frac{3}{2} + \Big[\log x\Big]_3^{2020} = \frac{3}{2} + \log 2020 - \log 3 = 1.5 + 7.61 - 1.10$$
$$= 8.01$$

(2) は (1) を示したことから

$$\underbrace{\square \leqq \sum_{k=1}^{2020} \frac{1}{k} < \square}_{\text{整数}} + 1$$

となる □ を求める!

$$\sum_{k=1}^{2020} \frac{1}{k} = 1 + \sum_{k=2}^{2020}$$
$$< 1 + \int_2^{2021} \frac{dx}{x-1} \quad (\because Ⓑ)$$
$$= 1 + \Big[\log(x-1)\Big]_2^{2021} = 1 + \log 2020 = 1 + 7.61$$
$$= 8.61$$

よって $8.01 < \displaystyle\sum_{k=1}^{2020} \frac{1}{k} < 8.61$ であるから $\displaystyle\sum_{k=1}^{2020} \frac{1}{k}$ の整数部分は 8　← $8 \leqq \displaystyle\sum_{k=1}^{2020} \frac{1}{k} < 9$