対数 log は自然対数とする．正の整数 n と実数 a に対して

$$S_n(a) = \sum_{k=1}^{n} \frac{a^k}{k}$$

とおく．次の問いに答えよ．

(1)　$a < 1$ のとき，等式

$$\int_0^a \frac{x^n}{x-1}\,dx = S_n(a) + \log(1-a)$$

を示せ．

(2)　$0 < a < 1$ のとき，不等式

$$\left| S_n(a) - \log\frac{1}{1-a} \right| \leqq \frac{a^{n+1}}{(n+1)(1-a)}$$

を示せ．

(3)　$a < 0$ のとき，不等式

$$\left| S_n(a) - \log\frac{1}{1-a} \right| \leqq \frac{(-a)^{n+1}}{n+1}$$

を示せ．

〔2017　大阪市大 理系 後期〕

〔解答例〕

(1)　$0 < x < a$ のとき

$$\frac{x^n}{x-1} = \frac{x^n - 1 + 1}{x-1} = \frac{(x-1)(x^{n-1} + \cdots + x + 1) + 1}{x-1}$$

← 分子に $x-1$ を作る!

$$= (1 + x + \cdots + x^{n-1}) + \frac{1}{x-1}$$

これより

$$\int_0^a \frac{x^n}{x-1}\,dx = \int_0^a \left\{ (1 + x + \cdots + x^{n-1}) + \frac{1}{x-1} \right\} dx$$
$$= \left[x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n} + \log|x-1| \right]_0^a$$
$$= a + \frac{a^2}{2} + \cdots + \frac{a^n}{n} + \log|a-1|$$
$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{a^k}{k} + \log(1-a)$$
$$= S_n(a) + \log(1-a)$$

よって，示された．

(2)　$0 < a < 1$ のとき，不等式

$$\left| S_n(a) - \log\frac{1}{1-a} \right| \leqq \frac{a^{n+1}}{(n+1)(1-a)} \quad \cdots\cdots \text{Ⓐ}$$

を示す．

$\log\frac{1}{1-a} = \log(1-a)^{-1}$
$= -\log(1-a)$

(1) より

$$S_n(a) - \log\frac{1}{1-a} = S_n(a) + \log(1-a) = \int_0^a \frac{x^n}{x-1}\,dx$$

← $0 \leqq x \leqq a < 1$
より x は 1 より小さく
$1 - x > 0$
$x - 1 = -(1-x)$
マイナスが出てきても絶対値記号で消せる!

$$= -\int_0^a \frac{x^n}{1-x}\,dx \quad \cdots\cdots ①$$

これより

$$\left| S_n(a) - \log\frac{1}{1-a} \right| = \left| -\int_0^a \frac{x^n}{1-x}\,dx \right| = \left| \int_0^a \frac{x^n}{1-x}\,dx \right|$$

$$\text{Ⓐ} \iff \left| \int_0^a \frac{x^n}{1-x}\,dx \right| \leqq \frac{a^{n+1}}{(n+1)(1-a)} \quad \cdots\cdots \text{Ⓐ}'$$

← Ⓐ を同値に言いかえた

Ⓐ$'$ を示す．

$0 \leqq x \leqq a$ のとき

$0 < 1 - a \leqq 1 - x$ であるから

$$0 \leqq \frac{x^n}{1-x} \leqq \frac{x^n}{1-a}$$

← $\frac{x^n}{1-x} \geqq 0$ なので $\int_0^a \frac{x^n}{1-x} \geqq 0$ 絶対値記号が外せる

積分は大小関係を保つ!

が常に成り立つので

$$\left| \int_0^a \frac{x^n}{1-x}\,dx \right| = \int_0^a \frac{x^n}{1-x}\,dx \leqq \int_0^a \frac{x^n}{1-a}\,dx = \left[\frac{x^{n+1}}{(n+1)(1-a)} \right]_0^a$$
$$= \frac{a^{n+1}}{(n+1)(1-a)}$$

よって，Ⓐ$'$ が成り立つのでⒶは示された．

(3)　$a < 0$ のとき，不等式

$$\left| S_n(a) - \log \frac{1}{1-a} \right| \leqq \frac{(-a)^{n+1}}{n+1} \quad \cdots\cdots Ⓑ$$

を示す．

$a<0$ より $\int_a^0$ とした

① より $\left| S_n(a) - \log \dfrac{1}{1-a} \right| = \left| -\displaystyle\int_0^a \frac{x^n}{1-x}\,dx \right| = \left| \displaystyle\int_a^0 \frac{x^n}{1-x}\,dx \right|$

$$Ⓑ \iff \left| \int_a^0 \frac{x^n}{1-x}\,dx \right| \leqq \frac{(-a)^{n+1}}{n+1} \quad \cdots\cdots Ⓑ'$$

← Ⓑを同値に言いかえた

Ⓑ$'$ を示す．

$a \leqq x \leqq 0$ のとき

$1 \leqq 1 - x$　であるから　$\dfrac{1}{1-x} \leqq 1$

両辺 $(-x)^n$ $(\geqq 0)$ をかけて　← $x \leqq 0$ より $-x \geqq 0$

$$0 \leqq \frac{(-x)^n}{1-x} \leqq (-x)^n$$

積分は大小関係を保つ!

が常に成り立つので

$$\int_a^0 \frac{(-x)^n}{1-x}\,dx \leqq \int_a^0 (-x)^n\,dx = \left[-\frac{(-x)^{n+1}}{n+1} \right]_a^0 = \frac{(-a)^{n+1}}{n+1}$$

も成り立つ．

ここで

$$\int_a^0 \frac{(-x)^n}{1-x}\,dx = \left| \int_a^0 \frac{(-x)^n}{1-x}\,dx \right| = \left| (-1)^n \int_a^0 \frac{x^n}{1-x}\,dx \right| = \left| \int_a^0 \frac{x^n}{1-x}\,dx \right|$$

よって，Ⓑ$'$ が成り立つのでⒷは示された．

〔 別解例 〕

(1)　$$f(a)=\int_0^a \frac{x^n}{x-1}\,dx-\left\{S_n(a)+\log(1-a)\right\}$$　← 示す等式の（左辺）−（右辺）を aの関数とみる！

$$=\int_0^a \frac{x^n}{x-1}\,dx-\left\{\sum_{k=1}^{n}\frac{a^k}{k}+\log(1-a)\right\}$$

とおくと

$$f'(a)=\frac{a^n}{a-1}-\left(\sum_{k=1}^{n}a^{k-1}+\frac{-1}{1-a}\right)$$
$$=\frac{a^n-1}{a-1}-\sum_{k=1}^{n}a^{k-1}$$
$$=\frac{a^n-1}{a-1}-\frac{a^n-1}{a-1}$$
$$=0$$

また $f(0)=\displaystyle\int_0^0 \frac{x^n}{x-1}\,dx-\left\{\sum_{k=1}^{n}\frac{0}{k}+\log(1-0)\right\}=0$

すなわち　$f'(a)=0$ かつ $f(0)=0$　であるから　$f(a)=0$　← （左辺）−（右辺）＝0 が示せた

よって　$\displaystyle\int_0^a \frac{x^n}{x-1}\,dx=S_n(a)+\log(1-a)$