半径 1 の円に~~内~~外接する $\triangle$ABC について，$\angle \mathrm{CAB} = 2x$，$\angle \mathrm{ABC} = 2y$，$\angle \mathrm{BCA} = 2z$ とする．$\triangle$ABC の面積を S とするとき，以下の問いに答えよ．

(1) $S = \dfrac{1}{\tan x} + \dfrac{1}{\tan y} + \dfrac{1}{\tan z}$ が成り立つことを示せ．

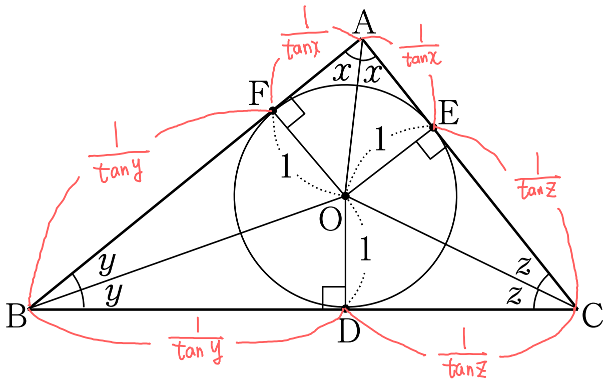
(2) $z = \dfrac{\pi}{6}$ のとき，S の最小値とそのときの x，y を求めよ．

〔2017　熊本大 医学部 前期〕

〔解答例〕

(1) 円の中心を O とし，

辺 BC，CA，AB と円との接点をそれぞれ D，E，F とする．



$\triangle \mathrm{AOE} \equiv \triangle \mathrm{AOF}$，$\triangle \mathrm{BOD} \equiv \triangle \mathrm{BOF}$，

$\triangle \mathrm{COD} \equiv \triangle \mathrm{COE}$ より

$\angle \mathrm{OAE} = \angle \mathrm{OAF} = x$

$\angle \mathrm{OBD} = \angle \mathrm{OBF} = y$

$\angle \mathrm{OCD} = \angle \mathrm{OCE} = z$

$\mathrm{AE} = \mathrm{AF} = \dfrac{1}{\tan x}$，$\mathrm{BD} = \mathrm{BF} = \dfrac{1}{\tan y}$，$\mathrm{CD} = \mathrm{CE} = \dfrac{1}{\tan z}$

$S = \triangle \mathrm{OAB} + \triangle \mathrm{OBC} + \triangle \mathrm{OCA}$　← 3つの三角形の和にする

$= \dfrac{1}{2}(\mathrm{AB} + \mathrm{BC} + \mathrm{CA})$　← 底辺を AB, BC, CA とみると高さはすべて 1

$= \dfrac{1}{2}(\mathrm{AF} + \mathrm{BF} + \mathrm{BD} + \mathrm{CD} + \mathrm{CE} + \mathrm{AE})$

$= \dfrac{1}{\tan x} + \dfrac{1}{\tan y} + \dfrac{1}{\tan z}$

よって　示された．

(2) $z = \dfrac{\pi}{6}$ のとき

$2x+2y+2z=\pi$

三角形の内角の和より　$2x + 2y + \dfrac{\pi}{3} = \pi$　であるから　$y = \dfrac{\pi}{3} - x$　……①

このとき　$0 < x < \dfrac{\pi}{3}$，$0 < y < \dfrac{\pi}{3}$

$\tan z = \tan \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

加法定理

① より　$\tan y = \tan\left(\dfrac{\pi}{3} - x\right) = \dfrac{\tan \frac{\pi}{3} - \tan x}{1 + \tan \frac{\pi}{3} \tan x} = \dfrac{\sqrt{3} - \tan x}{1 + \sqrt{3} \tan x}$　← ①から y を消して x だけに

$t = \tan x$　……②

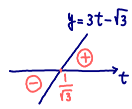
とおくと　$0 < t < \sqrt{3}$　← $0<x<\frac{\pi}{3}$

$$S = \frac{1}{\tan x} + \frac{1}{\tan y} + \frac{1}{\tan z} = \frac{1}{t} + \frac{\sqrt{3}t + 1}{\sqrt{3} - t} + \sqrt{3}$$　← t の 1 変数関数

$S = f(t)$ $(0 < t < \sqrt{3}\,)$ とおくと

$$f'(t) = -\frac{1}{t^2} + \frac{\sqrt{3}(\sqrt{3} - t) - (\sqrt{3}t + 1)(-1)}{(\sqrt{3} - t)^2} = -\frac{1}{t^2} + \frac{4}{(\sqrt{3} - t)^2}$$

$$= \frac{4t^2 - (\sqrt{3} - t)^2}{t^2(\sqrt{3} - t)^2} = \frac{(3t - \sqrt{3})(t + \sqrt{3})}{t^2(\sqrt{3} - t)^2}$$



t	(0)	$\cdots$	$\dfrac{1}{\sqrt{3}}$	$\cdots$	$(\sqrt{3})$
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$		↘	最小	↗	

増減表より $t=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ のとき $f(t)$ の最小値 $3\sqrt{3}$

このとき ② から $\tan x=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ $\quad\therefore x=\dfrac{\pi}{6}$

① から $y=\dfrac{\pi}{6}$

よって S の **最小値** $\boldsymbol{3\sqrt{3}\left(x=\dfrac{\pi}{6},\ y=\dfrac{\pi}{6}\right)}$ ← $\triangle ABC$ が正三角形のとき S は最小値をとる