数学Ⅲ　複素数平面

~高校数学のまとめ~

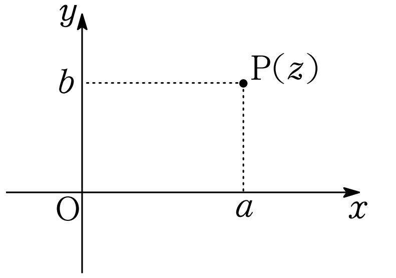
教科書をもとに定義や定理を独自にパネル形式でまとめています．
何度も書き直し，加筆修正を繰り返しており，完成したものではありません．
人によっては不要な部分もあるでしょう．そういうときは読み飛ばしてください．

「複素数」は数学 Ⅱ でも学習してます．

複素数平面

i を虚数単位，a，b を実数とする．

平面上に座標軸を定め　複素数 $z=a+bi$　を　点 $\mathrm{P}(a,\,b)$　に対応させる．



このように，各点 $(a,\,b)$ が複素数 $z=a+bi$ を表している平面を

複素数平面（ふくそすうへいめん）　または　**複素平面**（ふくそへいめん）　という．

このとき　x 軸　を　**実軸**（じつじく）といい，y 軸　を　**虚軸**（きょじく）　という．

実軸上の点は実数を表し，虚軸上の原点 O と異なる点は純虚数を表わす．

複素数 z に対応する点 P を　$\mathrm{P}(z)$　と表す．この点を　点 z　ということもある．

とくに　実数 0 は 原点 O を表す．

㊟ すべての複素数はそれぞれ平面上の 1 つの点で表され，逆に，平面上の 1 つのすべての点はそれぞれ 1 つの複素数で表されることになる．

㊟ 複素数平面をガウス平面ということもある．

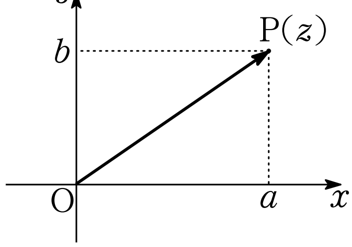
複素数平面とベクトル

$z=a+bi$（a，b は実数）とする．

複素数平面の原点 O，点 $\mathrm{P}(z)$ について

点 z は　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(a,\,b)$　と同一視できる．

とくに　点 0 は　$\vec{0}=(0,\,0)$　と同一視できる．



このことから，複素数の和，差，実数倍に関しては ベクトルと同じ演算 になる．

複素数平面における複素数の和

2 つの複素数 $\alpha = a + bi$，$\beta = c + di$（a，b，c，d は実数）について

和：$\alpha + \beta = (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$

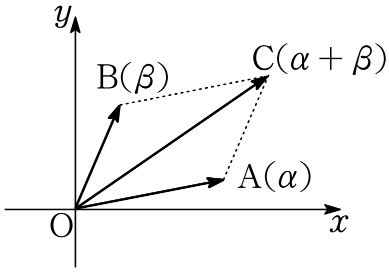
これをベクトルで考えると

$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$

つまり　複素数平面で α，β，$\alpha + \beta$ の表す点を

それぞれ A，B，C とすると

$\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}} = \overrightarrow{\mathrm{OC}}$



㊛ $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ が 1 次独立ならば，四角形 OACB は平行四辺形

複素数平面における複素数の差

2 つの複素数 $\alpha = a + bi$，$\beta = c + di$（a，b，c，d は実数）について

差：$\alpha - \beta = (a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$

これをベクトルで考えると

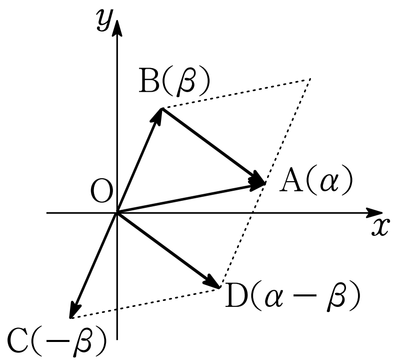
$(a, b) - (c, d) = (a - c, b - d)$

つまり　複素数平面で α，β，$-\beta$，$\alpha - \beta$ の表す点を

それぞれ A，B，C，D とすると

$\overrightarrow{\mathrm{OA}} - \overrightarrow{\mathrm{OB}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OC}} = \overrightarrow{\mathrm{OD}}$

すなわち　$\overrightarrow{\mathrm{OA}} - \overrightarrow{\mathrm{OB}} = \overrightarrow{\mathrm{BA}}$



㊛ $\overrightarrow{\mathrm{OD}} = \overrightarrow{\mathrm{BA}}$

複素数平面における複素数の実数倍

複素数 $\alpha = a + bi$ (a, b は実数) について，k を実数として

実数倍：$k(a+bi) = ka + kbi$

とくに $k=-1$ として $-\alpha = -(a+bi) = -a-bi$

これをベクトルで考えると

$k(a, b) = (ka, kb)$

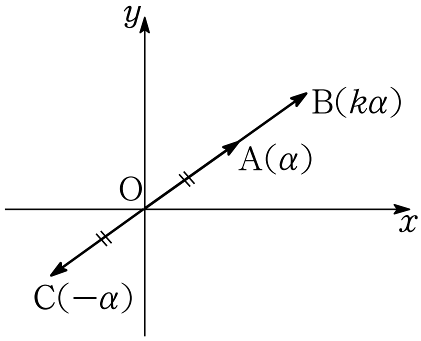
とくに $k=-1$ として $-(a, b) = (-a, -b)$

つまり 複素数平面で α，$k\alpha$，$-\alpha$ の表す点を

それぞれ A，B，C とすると

$k\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}}$

$-\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \overrightarrow{\mathrm{OC}}$



㊓ 図は $k > 1$

㊓ $\alpha \neq 0$ かつ $k \neq 0$ ならば 3 点 O，A，B は同一直線上にある.

㊓ $\alpha \neq 0$ かつ $k = -1$ ならば 2 点 A，C は O に関して対称

共役複素数

a，b を実数とする.

2 つの複素数 $a+bi$ と $a-bi$ を互いに共役(きょうやく)な複素数(ふくそすう)という.

複素数 z と共役な複素数 を $\overline{z}$ と表す.

つまり 実部が同じで虚部の符号が異なる複素数を互いに共役であるといい

複素数 $z = a + bi$ の共役な複素数は $\overline{z} = a - bi$ である.

共役複素数の性質

複素数 z，w について，次のことがいえる．

$\boxed{1}$ $\overline{z+w}=\overline{z}+\overline{w}$

$\boxed{2}$ $\overline{z-w}=\overline{z}-\overline{w}$

$\boxed{3}$ $\overline{zw}=\overline{z}\,\overline{w}$

$\boxed{4}$ $\overline{\left(\dfrac{z}{w}\right)}=\dfrac{\overline{z}}{\overline{w}}$

$\boxed{5}$ $\overline{(z)^n}=(\overline{z})^n$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

考 $z=a+bi$，$w=c+di$（a，b，c，d は実数）
とする．

$\boxed{1}$ (左辺)$=\overline{z+w}=\overline{(a+bi)+(c+di)}=\overline{(a+c)+(b+d)i}=(a+c)-(b+d)i$

(右辺)$=\overline{z}+\overline{w}=\overline{(a+bi)}+\overline{(c+di)}=(a-bi)+(c-di)=(a+c)-(b+d)i$

よって (左辺)$=$(右辺)

$\boxed{2}$ (左辺)$=\overline{z-w}=\overline{(a+bi)-(c+di)}=\overline{(a-c)+(b-d)i}=(a-c)-(b-d)i$

(右辺)$=\overline{z}-\overline{w}=\overline{(a+bi)}-\overline{(c+di)}=(a-bi)-(c-di)=(a-c)-(b-d)i$

よって (左辺)$=$(右辺)

$\boxed{3}$ (左辺)$=\overline{zw}=\overline{(a+bi)(c+di)}=\overline{(ac-bd)+(ad-bc)i}$

$=(ac-bd)-(ad-bc)i$

(右辺)$=\overline{z}\ \overline{w}=\overline{(a+bi)}\ \overline{(c+di)}=(a-bi)(c-di)=(ac-bd)-(ad-bc)i$

よって (左辺)$=$(右辺)

$\boxed{4}$ (左辺)$=\overline{\left(\dfrac{z}{w}\right)}=\overline{\left(\dfrac{a+bi}{c+di}\right)}=\overline{\dfrac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)}}=\overline{\left(\dfrac{ac+bd}{c^2+d^2}-\dfrac{ad-bc}{c^2+d^2}i\right)}$

$=\dfrac{ac+bd}{c^2+d^2}+\dfrac{ad-bc}{c^2+d^2}i$

(右辺)$=\dfrac{\overline{z}}{\overline{w}}=\dfrac{\overline{a+bi}}{\overline{c+di}}=\dfrac{a-bi}{c-di}=\dfrac{(a-bi)(c+di)}{(c-di)(c+di)}=\dfrac{ac+bd}{c^2+d^2}+\dfrac{ad-bc}{c^2+d^2}i$

よって (左辺)$=$(右辺)

$\boxed{5}$ (左辺)$=\overline{(z)^n}=\overline{z\cdot z\cdot\cdots\cdot z}=\overline{z}\cdot\overline{z}\cdot\cdots\cdot\overline{z}$ （$\because$ $\boxed{3}$）

(右辺)$=(\overline{z})^n=\overline{z}\cdot\overline{z}\cdot\cdots\cdot\overline{z}$

よって (左辺)$=$(右辺)

要

バーはバラバラにバラすことができる！

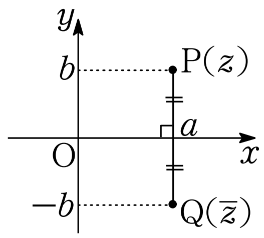
共役複素数と複素数平面

複素数 $z = a + bi$ とその共役な複素数 $\overline{z} = a - bi$（a，b は実数）について

z と $\overline{z}$ は **実軸**に関して**対称**である．

つまり　複素数平面で z，$\overline{z}$ の表す点を

それぞれ P，Q とすると右の図のようになる．



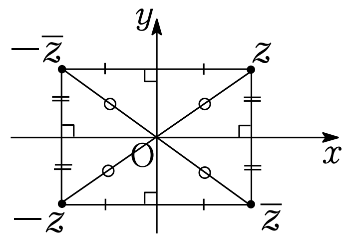
複素数平面と対称移動

複素数 z とその共役な複素数 $\overline{z}$ について，次の対称移動がある．

$\boxed{1}$ 点 z を実軸に関して対称移動した点は 点 $\overline{z}$

$\boxed{2}$ 点 z を原点に関して対称移動した点は 点 $-z$

$\boxed{3}$ 点 z を虚軸に関して対称移動した点は 点 $-\overline{z}$



考 $z = a + bi$（a, b は実数）とすると

$$\overline{z} = a - bi$$
$$-z = -a - bi$$
$$-\overline{z} = -a + bi$$

実数・純虚数になる条件

複素数 z について

$\boxed{1}$ 点 z が実数 $\iff$ $\overline{z} = z$

$\boxed{2}$ 点 z が純虚数 $\iff$ $z + \overline{z} = 0$ かつ $z \neq 0$

互いに共役な複素数の和と積

a，b を実数とする．

複素数 $z = a + bi$ と共役な複素数 $\overline{z} = a - bi$ について

和：$z + \overline{z} = (a + bi) + (a - bi) = 2a$

積：$z\,\overline{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2$

これらはともに実数である．

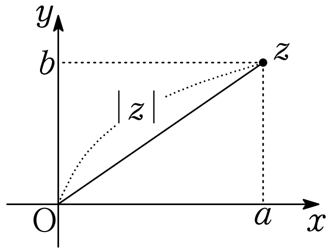
絶対値

複素数平面において，点 z と原点 O の距離を

複素数 z の **絶対値** といい $|z|$ と表す.

すなわち $z=a+bi$ (a, b は実数) とすると

$$|z|=|a+bi|=\sqrt{a^2+b^2}$$



つまり (z の絶対値) $=\sqrt{(z\text{ の実部})^2+(z\text{ の虚部})^2}$

複素数の絶対値の性質

複素数 z とその共役な複素数 $\overline{z}$ について，次の性質がある.

$\boxed{1}$ $|z|\geqq 0$ （等号が成り立つのは $z=0$）

$\boxed{2}$ $|z|=|-z|=|\overline{z}|$

絶対値と共役複素数の関係

複素数 z とその共役な複素数 $\overline{z}$ について

$$|z|^2=z\overline{z}$$

つまり (絶対値の 2 乗) = (複素数とその共役な複素数の積)

考 $z=a+bi$ (a, b は実数) とすると $\overline{z}=a-bi$

$|z|^2=\left(\sqrt{a^2+b^2}\right)^2=a^2+b^2$

$z\overline{z}=(a+bi)(a-bi)=a^2-(bi)^2=a^2+b^2$

よって $|z|^2=z\overline{z}$

複素数の展開

複素数 α, z と共役な複素数 $\overline{z}$ について

$$|z+\alpha|^2=|z|^2+\overline{\alpha}z+\alpha\overline{z}+|\alpha|^2$$

考 $|z+\alpha|=(z+\alpha)\overline{(z+\alpha)}=(z+\alpha)(\overline{z}+\overline{\alpha})=z\overline{z}+\overline{\alpha}z+\alpha\overline{z}+\alpha\overline{\alpha}$

$=|z|^2+\overline{\alpha}z+\alpha\overline{z}+|\alpha|^2$

複素数の偏角

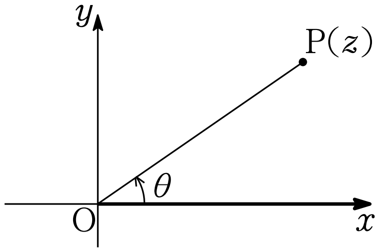
複素数平面で 0 と異なる複素数 z が表す点を P とし

実軸の正の部分を始線としたときの動径 OP が表す角を θ とする.

この θ を複素数 z の 偏角（へんかく） といい 記号 $\arg z$ で表す.

ここで θ は一般角である.

$z=0$ に対しては 偏角は定義されない.



補 arg は偏角を意味する argument からつくられた記号である.

補 偏角 θ の 1 つを α とすると $\arg z=\alpha+2k\pi$（k は整数）と表される.

補 偏角 θ は $0 \leqq \theta < 2\pi$ の範囲ではただ 1 通りに定まる.

複素数の極形式

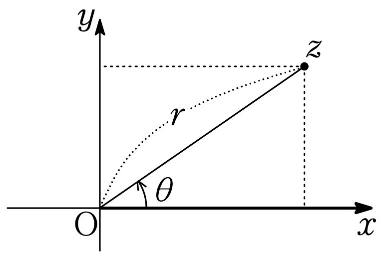
0 と異なる複素数 z は

　z の絶対値を $|z|=r$

　z の偏角を $\arg z=\theta$

として $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ と表される.

このような表し方を複素数 z の 極形式（きょくけいしき） という.



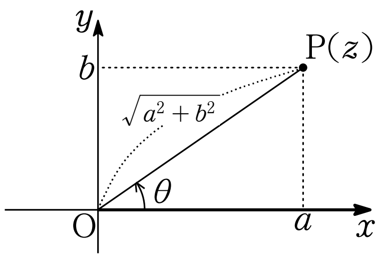
複素数を極形式で表す

a, b は実数, $(a,\ b) \neq (0,\ 0)$ とする.

複素数 $z = a + bi$ は

極形式 $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

で表すことができる.



ただし

r は z の絶対値で $r = |z| = \sqrt{a^2+b^2}$

θ は $(\cos\theta,\ \sin\theta) = \left(\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$ を満たす角で $\theta = \arg z$

㊔ $z = a + bi = \sqrt{a^2+b^2}\left(\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} + \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}i\right)$

(補) $z = \sqrt{3} + i = 2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i\right) = 2\left(\cos\dfrac{\pi}{6} + i\sin\dfrac{\pi}{6}\right)$

共役複素数の極形式

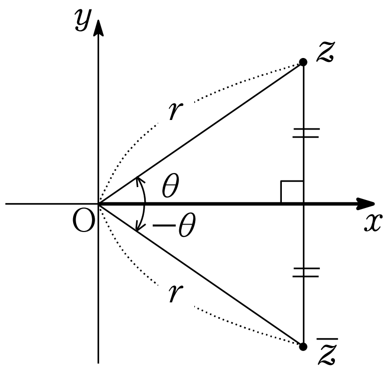
複素数 z を極形式 $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ で表す.

このとき 共役複素数 $\overline{z}$ を極形式で表すと

$$\overline{z} = r\{\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)\}$$

すなわち

$$|\overline{z}| = |z|,\ \arg\overline{z} = -\arg z$$



㊟ $\arg\overline{z} = -\arg z$ は両辺が 2π の整数倍の違いを除いて一致することを意味する.

極形式で表された複素数の積

2 つの複素数 z，w を極形式でそれぞれ

$$z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$$
$$w = R(\cos\beta + i\sin\beta)$$

と表すとき，積 zw は

$$zw = rR\{\cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta)\}$$

すなわち $|zw| = |z||w|$，$\arg zw = \arg z + \arg w$

㊟ $\arg zw = \arg z + \arg w$ は両辺が 2π の整数倍の違いを除いて一致することを意味する．

㊫ $zw = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)\cdot R(\cos\beta + i\sin\beta)$

$= rR\{(\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta) + i(\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta)\}$

$= rR\{\cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta)\}$（∵ 加法定理）

㊕ $\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right)$

$= \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = i$

極形式で表された複素数の商

2 つの複素数 z，w を極形式でそれぞれ

$$z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$$
$$w = R(\cos\beta + i\sin\beta)$$

と表すとき，商 $\dfrac{z}{w}$ は

$$\text{商：}\frac{z}{w} = \frac{r}{R}\{\cos(\alpha-\beta) + i\sin(\alpha-\beta)\}$$

すなわち $\left|\dfrac{z}{w}\right| = \dfrac{|z|}{|w|}$，$\arg\dfrac{z}{w} = \arg z - \arg w$

㊟ $\arg\frac{z}{w} = \arg z - \arg w$ は両辺が 2π の整数倍の違いを除いて一致することを意味する．

㊫ $\dfrac{z}{w} = \dfrac{r(\cos\alpha + i\sin\alpha)}{R(\cos\beta + i\sin\beta)}$

$= \dfrac{r}{R}\cdot\dfrac{(\cos\alpha + i\sin\alpha)(\cos\beta - i\sin\beta)}{(\cos\beta + i\sin\beta)(\cos\beta - i\sin\beta)}$

$= \dfrac{r}{R}\{(\cos\theta\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta) + i(\sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta)\}$

$= \dfrac{r}{R}\{\cos(\alpha-\beta) + i\sin(\alpha-\beta)\}$（∵ 加法定理）

㊕ $\dfrac{\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}}{\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}} = \cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right) = \cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}$

$= \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i$

ド・モアブルの定理

整数 n に対して

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$$

考 あ $n \geqq 0$ のとき

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta \quad \cdots\cdots Ⓐ$$

が成り立つことを数学的帰納法で示す．

(Ⅰ) $n=0$ のとき

$$(\text{左辺}) = (\cos\theta + i\sin\theta)^0 = 1$$

$$(\text{右辺}) = \cos 0 + i\sin 0 = 1$$

(左辺) = (右辺) より $n=0$ のとき Ⓐ は成り立つ．

(Ⅱ) $n=k$ $(k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$ のとき Ⓐ が成り立つと仮定すると

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^k = \cos k\theta + i\sin k\theta \quad \cdots\cdots ①$$

が成り立つ．このとき

$$\begin{aligned}(\cos\theta + i\sin\theta)^{k+1} &= (\cos\theta + i\sin\theta)^k(\cos\theta + i\sin\theta)\\ &= (\cos k\theta + i\sin k\theta)(\cos\theta + i\sin\theta) \quad (\because ①)\\ &= (\cos k\theta\cos\theta - \sin k\theta\sin\theta) + i(\sin k\theta\cos\theta + \cos k\theta\sin\theta)\\ &= \cos(k\theta+\theta) + i\sin(k\theta+\theta) \quad (\because \text{加法定理})\\ &= \cos\{(k+1)\theta\} + i\sin\{(k+1)\theta\}\end{aligned}$$

すなわち $n=k+1$ のときも Ⓐ は成り立つ．

ゆえに (Ⅰ)，(Ⅱ) より示された．

このことから 0 以上の整数 n で成り立つことが示された．

い $n<0$ のとき

$$n = -m \quad \cdots\cdots ②$$

とおくと $m>0$ である．

$$\begin{aligned}(\cos\theta + i\sin\theta)^n &= (\cos\theta + i\sin\theta)^{-m} \quad (\because ②)\\ &= \{(\cos\theta + i\sin\theta)^m\}^{-1}\\ &= (\cos m\theta + i\sin m\theta)^{-1} \quad (\because m \text{ は正の整数より あ})\\ &= \frac{1}{\cos m\theta + i\sin m\theta}\\ &= \cos m\theta - i\sin m\theta\\ &= \cos(-n\theta) - i\sin(-n\theta) \quad (\because ②)\\ &= \cos n\theta + i\sin n\theta\end{aligned}$$

すなわち負の整数 n で成り立つことが示された．

よって，あ，い より示された．

例 $\left(\cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)^6 = \cos\left(6\cdot\dfrac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(6\cdot\dfrac{\pi}{3}\right) = \cos 2\pi + i\sin 2\pi = 1$

極形式の累乗

複素数 z を極形式 $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ で表す.

このとき n を整数として z^n を極形式で表すと

$$z^n=r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)$$

すなわち

$$|z^n|=|z|^n,\ \arg z^n=n\arg z$$

㊟ $\arg z^n=n\arg z$ は両辺が 2π の整数倍の違いを除いて一致することを意味する.

偏角の性質

複素数 z, w, 共役複素数 $\overline{z}$ の偏角について, 次のことがいえる.

ただし, 両辺が 2π の整数倍の違いを除いて一致することを意味する.

$\boxed{1}$ $\arg\overline{z}=-\arg z$

$\boxed{2}$ $\arg zw=\arg z+\arg w$

$\boxed{3}$ $\arg\dfrac{z}{w}=\arg z-\arg w$

$\boxed{4}$ $\arg z^n=n\arg z$ (n は整数)

㊫ 対数法則と同じ性質

㊖

複素数の積と商は回転移動を意味する.

複素数平面の原点が中心の回転移動

0 でない 2 つの複素数 z，w が表す点をそれぞれ P，Q とする．

点 P(z) を原点 O を中心に角 θ だけ回転した点を Q(w) とすると

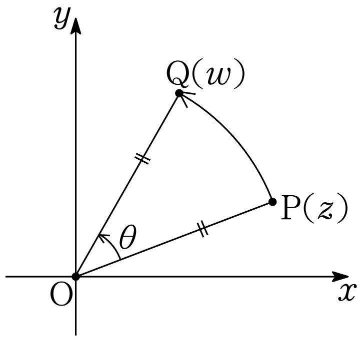
$$w=(\cos\theta+i\sin\theta)z$$

すなわち

$$\frac{w}{z}=\cos\theta+i\sin\theta$$

ここで

$$\left|\frac{w}{z}\right|=1,\ \arg\frac{w}{z}=\theta$$



㊟考 $z=r(\cos\alpha+i\sin\alpha)$ とすると

$$(\cos\theta+i\sin\theta)z=(\cos\theta+i\sin\theta)\cdot r(\cos\alpha+i\sin\alpha)$$
$$=r\{\cos(\theta+\alpha)+i\sin(\theta+\alpha)\}$$

㊟補 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を点 O を中心に θ 回転して $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$

イメージは $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=(\cos\theta+i\sin\theta)\overrightarrow{\mathrm{OP}}$（答案には書かない）

すなわち $w=(\cos\theta+i\sin\theta)z$

複素数平面の原点以外が中心の回転移動

複素数 α と α 以外の 2 つの複素数 z，w について

α，z，w を表す点をそれぞれ A，P，Q とする．

点 P(z) を点 A(α) を中心に角 θ だけ回転した点を Q(w) とすると

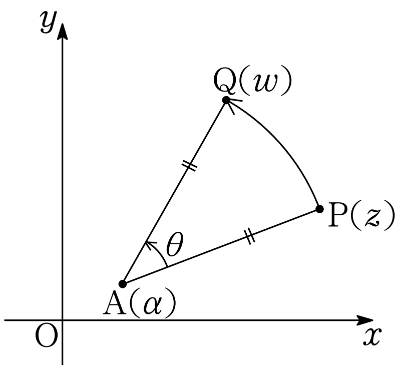
$$w-\alpha=(\cos\theta+i\sin\theta)(z-\alpha)$$

すなわち

$$\frac{w-\alpha}{z-\alpha}=\cos\theta+i\sin\theta$$

ここで

$$\left|\frac{w-\alpha}{z-\alpha}\right|=1,\ \arg\left(\frac{w-\alpha}{z-\alpha}\right)=\theta$$



㊟補 $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ を点 O を中心に θ 回転して $\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$

イメージは $\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=(\cos\theta+i\sin\theta)\overrightarrow{\mathrm{AP}}$

始点を O として $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(\cos\theta+i\sin\theta)(\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}})$（裏でやる）

すなわち $w-\alpha=(\cos\theta+i\sin\theta)(z-\alpha)$

複素数平面の原点が中心回転移動と拡大縮小

0 でない 2 つの複素数 z，w が表す点をそれぞれ P，Q とする．

点 P(z) を原点 O を中心に角 θ だけ回転し r 倍した点を Q(w) とすると

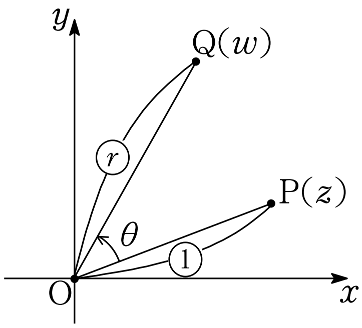
$$w = r(\cos\theta + i\sin\theta)z$$

すなわち

$$\frac{w}{z} = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

ここで

$$\left|\frac{w}{z}\right| = r,\ \arg\frac{w}{z} = \theta$$



考 複素数平面の原点が中心の回転移動 と 複素数平面における複素数の実数倍 を合わせる．

複素数平面の原点以外が中心の回転移動と拡大縮小

複素数 α と α 以外の 2 つの複素数 z，w について

α，z，w を表す点をそれぞれ A，P，Q とする．

点 P(z) を点 A(α) を中心に角 θ だけ回転し r 倍した点を Q(w) とすると

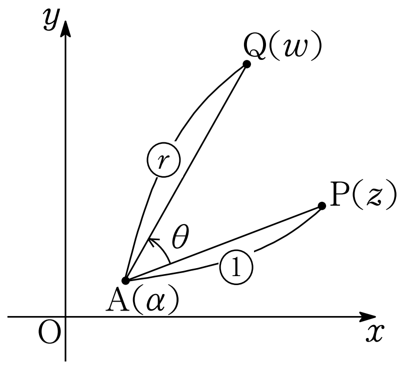
$$w - \alpha = r(\cos\theta + i\sin\theta)(z - \alpha)$$

すなわち

$$\frac{w-\alpha}{z-\alpha} = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

ここで

$$\left|\frac{w-\alpha}{z-\alpha}\right| = r,\ \arg\left(\frac{w-\alpha}{z-\alpha}\right) = \theta$$



考 複素数平面の原点が中心の回転移動と拡大縮小 で α だけ平行移動する．

複素数と角

複素数 α と α 以外の 2 つの複素数 z，w について

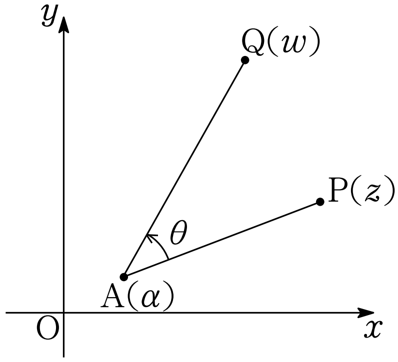
α，z，w を表す点をそれぞれ A，P，Q とする．

$\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ の正方向の半直線 AP を始線としたときの

動径 AQ の表す角を θ として

$$\theta = \arg\left(\frac{w-\alpha}{z-\alpha}\right)$$

とくに $0 \leqq \theta \leqq \pi$ ならば $\angle\mathrm{PAQ} = \theta$



3 点の位置関係

複素数平面に 3 点 A(α)，P(z)，Q(w) があるとき

1. 3 点 A，Q，R が一直線上にある $\iff \dfrac{w-\alpha}{z-\alpha}$ が実数

2. 2 直線 AP，AQ が垂直に交わる $\iff \dfrac{w-\alpha}{z-\alpha}$ が純虚数

考 1. $\arg\left(\dfrac{w-\alpha}{z-\alpha}\right) = k\pi$（$k$ は整数）

2. $\arg\left(\dfrac{w-\alpha}{z-\alpha}\right) = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$（$k$ は整数）

4 点の位置関係

複素数平面に異なる 4 点 A(α)，B(β)，P(z)，Q(w) があるとき

1. 2 直線 AB，PQ が平行 $\iff \dfrac{w-z}{\beta-\alpha}$ が実数

2. 2 直線 AB，PQ が垂直に交わる $\iff \dfrac{w-z}{\beta-\alpha}$ が純虚数

考 1. $\arg\left(\dfrac{w-z}{\beta-\alpha}\right) = k\pi$（$k$ は整数）

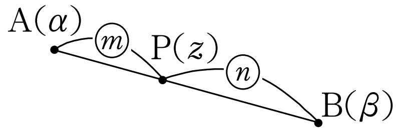
2. $\arg\left(\dfrac{w-z}{\beta-\alpha}\right) = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$（$k$ は整数）

内分点を表す複素数

複素数平面の 2 点 A(α)，B(β) に対し

線分 AB を $m:n$ $(m>0,\ n>0)$ に内分する点を P(z) とすると，次が成り立つ．

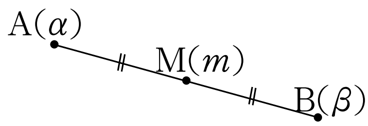
$\boxed{1}$ $z-\alpha=\dfrac{m}{m+n}(\beta-\alpha)$



$\boxed{2}$ $z=\dfrac{n\alpha+m\beta}{m+n}$

とくに 線分 AB の中点を M(m) とすると

$$m=\frac{\alpha+\beta}{2}$$



考 原点 O(0) として，ベクトルでイメージする．

$\boxed{1}$ $\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\dfrac{m}{m+n}\overrightarrow{\mathrm{AB}} \iff \overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\dfrac{m}{m+n}(\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}})$

$\boxed{2}$ $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{n\overrightarrow{\mathrm{OA}}+m\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{m+n}$

外分点を表す複素数

複素数平面の 2 点 A(α)，B(β) に対し

線分 AB を $m:n$ $(m>0,\ n>0,\ m\neq n)$ に外分する点を Q(w) とすると

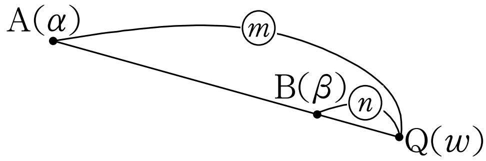
次が成り立つ．

$\boxed{1}$ $w-\alpha=\dfrac{m}{m-n}(\beta-\alpha)$

または

$w-\alpha=\dfrac{-m}{n-m}(\beta-\alpha)$

〔$m>n$ のとき〕

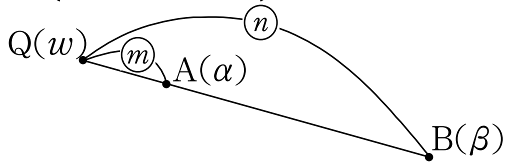


$\boxed{2}$ $w=\dfrac{(-n)\alpha+m\beta}{m+(-n)}$

または

$w=\dfrac{n\alpha+(-m)\beta}{(-m)+n}$

〔$m<n$ のとき〕



考 原点 O(0) として，ベクトルでイメージする．

$\boxed{1}$ $\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=\dfrac{m}{m-n}\overrightarrow{\mathrm{AB}} \iff \overrightarrow{\mathrm{OQ}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\dfrac{m}{m-n}(\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}})$

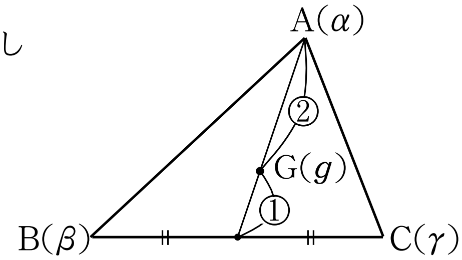
$\boxed{2}$ $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\dfrac{-n\overrightarrow{\mathrm{OA}}+m\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{m-n}=\dfrac{n\overrightarrow{\mathrm{OA}}-m\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{-m+n}$

三角形の重心を表す複素数

複素数平面の 3 点 $A(\alpha)$，$B(\beta)$，$C(\gamma)$ に対し

$\triangle ABC$ を重心を $G(g)$ とすると次が成り立つ.

$$g=\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}$$



考 原点 O(0) として，ベクトルでイメージする.

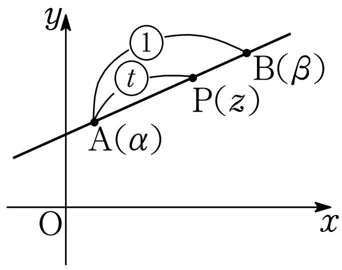
$$\overrightarrow{OG}=\frac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}}{3}$$

複素数平面での直線の方程式

複素数平面の異なる 2 点 $A(\alpha)$，$B(\beta)$ に対し

直線 AB を $P(z)$ が表わすとき

t を実数として



$\boxed{1}$ $z=\alpha+t(\beta-\alpha)$

$\boxed{2}$ $z=(1-t)\alpha+t\beta$

$\boxed{3}$ $z=p\alpha+q\beta$ かつ $p+q=1$

考 原点 O(0) として，ベクトルでイメージする.

$\boxed{1}$ $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+t\,\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OA}+t\,(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})$

$\boxed{2}$ $\overrightarrow{OP}=(1-t)\,\overrightarrow{OA}+t\,\overrightarrow{OB}$

$\boxed{3}$ $\boxed{2}$ で $1-t=p$，$t=q$ とおいて

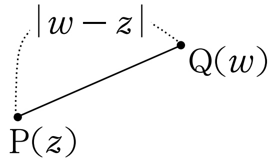
$\overrightarrow{OA}=p\,\overrightarrow{OA}+q\,\overrightarrow{OB}$ かつ $p+q=1$

複素数平面での 2 点間の距離

複素数平面に 2 点 P(z)，Q(w) がある．

2 点 P，Q を結ぶ線分 PQ の距離は

$$\mathrm{PQ} = |z - w| = |w - z|$$



つまり（2 点間の距離）=（2 点を表わす複素数の差の絶対値）

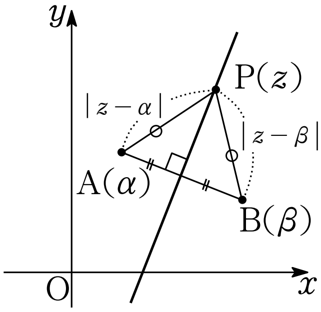
複素数平面における垂直二等分線の方程式

複素数平面に異なる 2 点 A(α)，B(β) がある．

線分 AB の垂直二等分線 を P(z) が表すとき

AP = BP であるから

$$|z - \alpha| = |z - \beta|$$



複素数平面における円の方程式

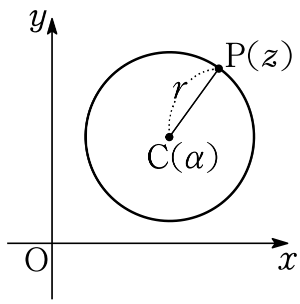
複素数平面において

中心が C(α)，半径 r ($r > 0$) の円を P(z) が表すとき

CP = r であるから

$\boxed{1}$ $|z - \alpha| = r$

$\boxed{2}$ $|z|^2 - \overline{\alpha}z - \alpha\overline{z} + |\alpha|^2 = r^2$



考 $\boxed{1}$ CP $= |z - \alpha|$

$\boxed{2}$ $|z - \alpha|^2 = r^2 \iff (z - \alpha)(\overline{z} - \overline{\alpha}) = r^2$

複素数平面上の原点を通る直線に関して 2 点が対称になる条件

複素数平面で原点を O(0)，O 以外の点 A(α) があり

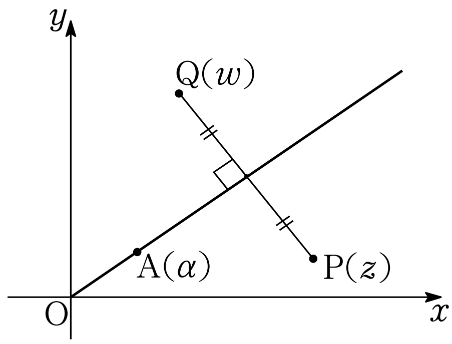
2 点 P(z)，Q(w) が直線 OA に関して対称であるとする．

このとき

$$\frac{w}{\alpha}=\overline{\left(\frac{z}{\alpha}\right)}$$

すなわち

$$w=\frac{\alpha\overline{z}}{\overline{\alpha}}=\frac{\alpha^2\overline{z}}{|\alpha|^2}$$



考 $\left|\dfrac{w}{\alpha}\right|=\left|\dfrac{z}{\alpha}\right|$ かつ $\arg\dfrac{w}{\alpha}=-\arg\dfrac{z}{\alpha}$ より $\dfrac{w}{\alpha}=\overline{\left(\dfrac{z}{\alpha}\right)}$

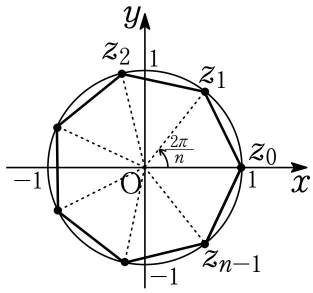
1 の n 乗根

1 の n 乗根 つまり $z^n=1$ をみたす複素数 z は n 個あり

$$z_k=\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}\ (k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n-1)$$

これら n 個の複素数は複素数平面において

単位円上にあり，正 n 角形の頂点である.



㊂ $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)\ (r>0,\ 0\leqq\theta<2\pi)$ ……☆

とおくと

$z^n=r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)$

$1=1\cdot(\cos 0+i\sin 0)$

$z^n=1$ をみたすので絶対値と偏角を考えて

$$\begin{cases} r^n=1 \\ n\theta=2k\pi\ (k\ \text{は整数}) \end{cases}$$

すなわち $r=1$

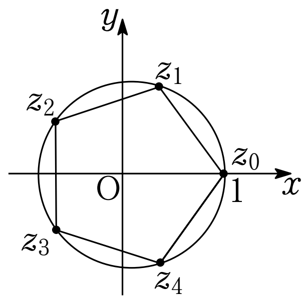
$0\leqq\theta<2\pi$ より $\theta=\dfrac{k\pi}{n}\ (k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n-1)$

☆より $z=z_k=\cos\dfrac{2k\pi}{n}+i\sin\dfrac{2k\pi}{n}\ (k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n-1)$

㊄ $z^5=1$ を満たす複素数は 5 個あり

$z_k=\cos\dfrac{2k\pi}{5}+i\sin\dfrac{2k\pi}{5}\ (k=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4)$

これらは右図のように正五角形の頂点になる.



実数係数の高次方程式と虚数解

n は自然数，a_n，a_{n-1}，$\cdots$，a_1，a_0 はすべて実数，$a_n \neq 0$ とする．

実数係数の n 次方程式

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$$

が虚数解 α をもつならば，共役な虚数 $\overline{\alpha}$ も解となる．

考 $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$ ……＊

とおく．

＊ が虚数解 α を解にもつならば

$a_n \alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + \cdots + a_1 \alpha + a_0 = 0$

が成り立つので

$\overline{a_n \alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + \cdots + a_1 \alpha + a_0} = \overline{0}$

すなわち

$\overline{a_n}\,(\overline{\alpha})^n + \overline{a_{n-1}}\,(\overline{\alpha})^{n-1} + \cdots + \overline{a_1}\,\overline{\alpha} + \overline{a_0} = \overline{0}$ $\left(\because \boxed{\text{共役複素数の性質}}\right)$

ここで a_n，a_{n-1}，$\cdots$，a_1，a_0，0 は実数であるから

$a_n\,(\overline{\alpha})^n + a_{n-1}\,(\overline{\alpha})^{n-1} + \cdots + a_1\,\overline{\alpha} + a_0 = 0$（$\because$ z が実数 $\iff$ $\overline{z} = z$）

よって $\overline{\alpha}$ は ＊ の解となる．