数学 II　微分法

~高校数学のまとめ~

教科書をもとに定義や定理を独自にパネル形式でまとめています．
何度も書き直し，加筆修正を繰り返しており，完成したものではありません．
人によっては不要な部分もあるでしょう．そういうときは読み飛ばしてください．

平均変化率

関数 $y=f(x)$ において

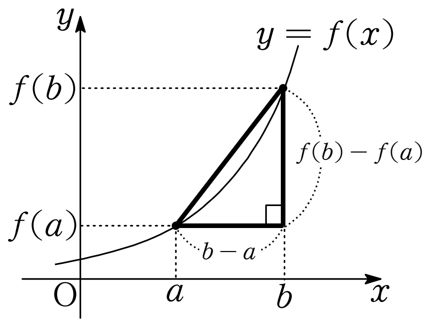
x の値が a から b まで増加するとき

x の変化量 $b-a$

y の変化量 $f(b)-f(a)$

との比

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\ \left(=\frac{y\text{の変化量}}{x\text{の変化量}}\right)$$



を x が a から b まで変わるときの関数 $y=f(x)$ の 平均変化率（へいきんへんかりつ） という．

これは 2 点 $(a,\ f(a))$，$(b,\ f(b))$ を通る直線の傾きである．

㊓ 「平均変化率」は「変化の割合」ともいう．

㋑ $y=x^2$ の関係が成り立つとき，x の値が 1 から 3 まで変わるときの平均変化率は

$$f(x)=x^2 \text{ として } \frac{f(3)-f(1)}{3-1}=\frac{9-1}{2}=\mathbf{4}$$

これは，ある物体が x 秒間に進んだ距離を y m として $y=x^2$ が成り立つならば
1 秒後から 3 秒後までの間の平均の速さが 4 m/秒 であることを表わしている．

極限値

関数 $f(x)$ において

x が a と異なる値をとりながら限りなく a に近づくとき

$f(x)$ が一定の値 α に限りなく近づくならば

$$x\to a \text{ のとき } f(x)\to\alpha \quad \text{または} \quad \lim_{x\to a} f(x)=\alpha$$

とかき，α を x が a に限りなく近づくときの関数 $f(x)$ の 極限値（きょくげんち） という．

㊓ lim は極限を意味する limt に由来する記号で「リミット」と読む．

㋑ $f(x)=x^2$ について $\lim_{x\to 3} f(x)=\lim_{x\to 3} x^2=9$

微分係数

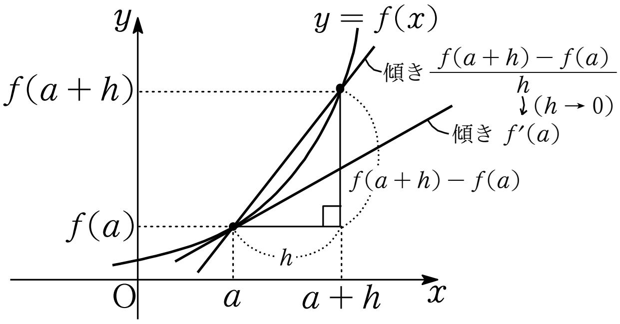
x の値が a から $a+h$ まで変わるときの

関数 $y=f(x)$ の平均変化率

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

において

h を限りなく 0 に近づけたとき



この平均変化率がある値に限りなく近づくならば，その極限値を

関数 $y=f(x)$ の $x=a$ における 微分係数（びぶんけいすう） といい $f'(a)$ で表す.

すなわち

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

㊀ $f(x)=x^2$ について

$$f'(a)=\lim_{h\to\infty}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(a+h)^2-a^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2ah+h^2}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}(2a+h)=2a$$

Ⓖ 微分係数とグラフ

導関数の定義

関数 $y=f(x)$ において

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

を $f(x)$ の 導関数（どうかんすう） という.

㊥ $x=a$ とすると $f'(a)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ となる.

これは $x=a$ における微分係数である.

導関数の増分

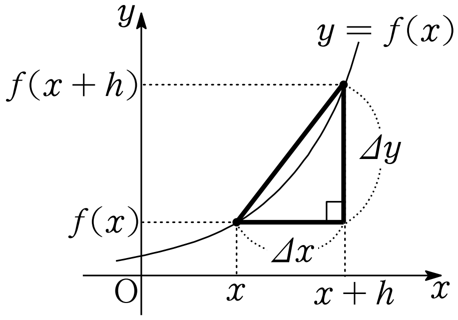
関数 $y=f(x)$ の導関数 $f'(x)=\lim_{h\to0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ において

h を x の増分(ぞうぶん)といい $\varDelta x$ と表す.

$f(x+h)-f(x)$ を y の増分(ぞうぶん) といい $\varDelta y$ と表す.

すなわち

$$f'(x)=\lim_{\varDelta x\to0}\frac{\varDelta y}{\varDelta x}$$
$$=\lim_{\varDelta x\to0}\frac{f(x+\varDelta x)-f(x)}{\varDelta x}$$



導関数の表記

$y=f(x)$ の導関数を表わす記号として

$$f'(x),\ \{f(x)\}',\ \big(f(x)\big)',\ y',\ \frac{dy}{dx},\ \frac{d}{dx}f(x)$$

などが用いられる.

微分する

x の関数 $f(x)$ からその導関数 $f'(x)$ を求めることを

$f(x)$ を x で 微分(びぶん)する という.

x^n の微分

n が正の整数のとき　$(x^n)' = n\,x^{n-1}$

とくに

$$(x)' = 1$$
$$(x^2)' = 2\,x$$
$$(x^3)' = 3\,x^2$$
$$(x^4)' = 4\,x^3$$

考 $f(x) = x^n$ について

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n - x^n}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{(x^n + {}_n\mathrm{C}_1 x^{n-1}h + {}_n\mathrm{C}_2 x^2 h^2 + \cdots + h^n) - x^n}{h} \quad (\because \text{二項定理}) \\ &= \lim_{h\to 0}(nx^{n-1} + {}_n\mathrm{C}_2 x^2 h + \cdots + h^n) \\ &= nx^{n-1} \end{aligned}$$

$(x+\alpha)^n$ の微分

n が正の整数，α を定数とするとき　$\{(x+\alpha)^n\}' = n(x+\alpha)^{n-1}$

とくに

$$\{(x+\alpha)^2\}' = 2(x+\alpha)$$
$$\{(x+\alpha)^3\}' = 3(x+\alpha)^2$$
$$\{(x+\alpha)^4\}' = 4(x+\alpha)^3$$

定数関数の微分

c を定数とすると　$(c)' = 0$

考 $f(x) = c$ について

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{c-c}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0$$

和・差・実数倍の微分

$\boxed{1}$ $\{f(x)+g(x)\}'=f'(x)+g'(x)$

$\boxed{2}$ $\{f(x)-g(x)\}'=f'(x)-g'(x)$

$\boxed{3}$ k を実数とするとき $\{k\,f(x)\}'=k\,f'(x)$

$\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$ をまとめて，関数 $f(x)$，$g(x)$ と実数 s，t に対して

$$\{s\,f(x)+t\,g(x)\}'=s\,f'(x)+t\,g'(x)$$

例 $\boxed{1}$ $(x^3+x^2)'=(x^3)'+(x^2)'=3x^2+2x$

$\boxed{2}$ $(x^3-x^2)'=(x^3)'-(x^2)'=3x^2-2x$

$\boxed{3}$ $(3x^2)'=3(x^2)'=3\cdot 2x=6x$

$(4x^3+3x^2)'=4(x^3)'+3(x^2)'=4\cdot 3x^2+3\cdot 2x=12x^2+6x$

接線の傾き

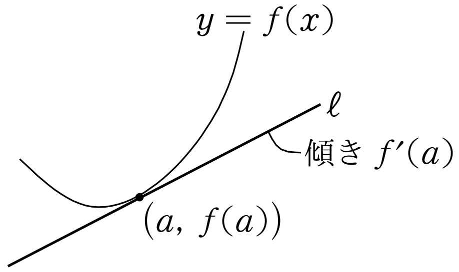
座標平面において

曲線 $y=f(x)$ 上の点 $\bigl(a,\ f(a)\bigr)$ における

接線の傾き は $f'(a)$ に等しい.

つまり

(接線の傾き)=(導関数に接点の座標を代入した値)



接線の方程式

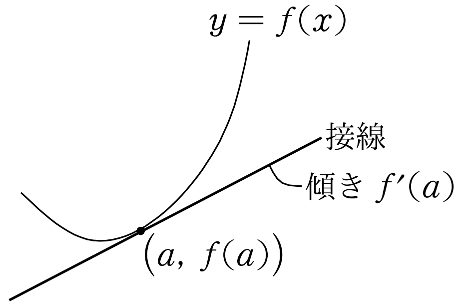
座標平面において

曲線 $y=f(x)$ 上の点 $\bigl(a,\ f(a)\bigr)$ における

接線の方程式 は

$$y=f'(a)(x-a)+f(a)$$

とくに 点 $\bigl(a,\ f(a)\bigr)$ を 接点(せってん) という.



法線の方程式

座標平面において

曲線 $y=f(x)$ 上の点 $\bigl(a,\ f(a)\bigr)$ における

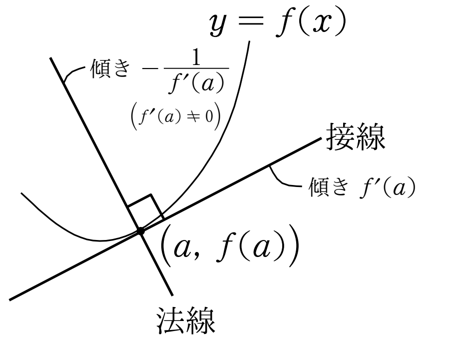
法線の方程式 は

1 $f'(a)\neq 0$ のとき

$$y=-\frac{1}{f'(a)}(x-a)+f(a)$$

2 $f'(a)=0$ のとき

$$x=a$$



法線の方程式の一般形として

$$x+f'(a)y=a+f'(a)f(a)$$

(補) 法線は接点を通り, 接線に直交する直線

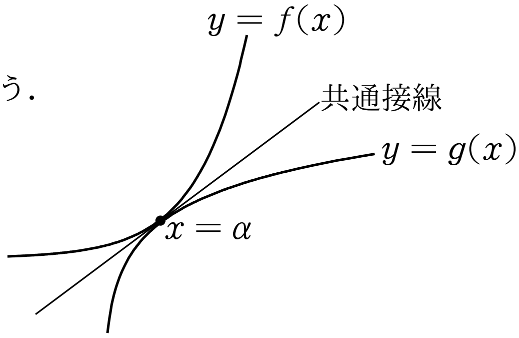
(補) 法線の法線ベクトルは接線の方向ベクトル $\bigl(1,\ f'(a)\bigr)$

2曲線が接する条件

座標平面で

2曲線 $\begin{cases} y=f(x) \\ y=g(x) \end{cases}$ が $x=\alpha$ で共通接線をもつとき

2曲線 $\begin{cases} y=f(x) \\ y=g(x) \end{cases}$ は $x=\alpha$ で接するという.



このとき

$$\begin{cases} f(\alpha)=g(\alpha) \\ f'(\alpha)=g'(\alpha) \end{cases}$$

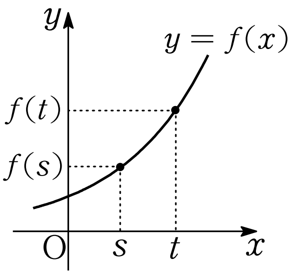
区間

不等式の満たす実数 x の範囲 を 区間(くかん) という.

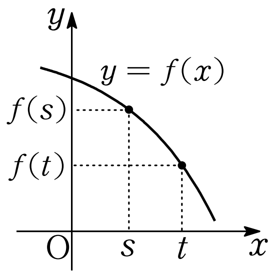
関数の単調増加・単調減少

関数 $f(x)$ において，ある区間の任意の値 s，t について

1



2



1 $s < t$ ならば $f(s) < f(t)$ が成り立つとき

$f(x)$ はその区間で **単調に増加する** という.

2 $s < t$ ならば $f(s) > f(t)$ が成り立つとき

$f(x)$ はその区間で **単調に減少する** という.

導関数の符号と関数の増減

関数 $y = f(x)$ の値の 増減(ぞうげん) は次のようになる.

⊕ $f'(x) > 0$ ならば，その区間で $f(x)$ は 増加(ぞうか) (↗) する.

⊖ $f'(x) < 0$ ならば，その区間で $f(x)$ は 減少(げんしょう) (↘) する.

㊟考 $f(x)$ が増加する区間で接線を引くと傾きが正になる.
$f(x)$ が減少する区間で接線を引くと傾きが負になる.

補 $f'(x) = 0$ が常に成り立つならば，その区間で $f(x)$ は定数である.
$f'(x) = 0$ かつそのときの x の前後で $f'(x) \neq 0$ ならば，
その区間で $f(x)$ は定数ではない.

極値

関数 $y=f(x)$ において

$\boxed{1}$ $x=a$ の前後で $f(x)$ の値が 増加（$\nearrow$）から 減少（$\searrow$）となるとき

$f(x)$ は $x=a$ において 極大（きょくだい） になるという．

そのときの $y=f(x)$ 上の点を極大点（きょくだいてん）といい，値 $f(a)$ を **極大値**（きょくだいち） という．

$\boxed{2}$ $x=a$ の前後で $f(x)$ の値が 減少（$\searrow$）から 増加（$\nearrow$）となるとき

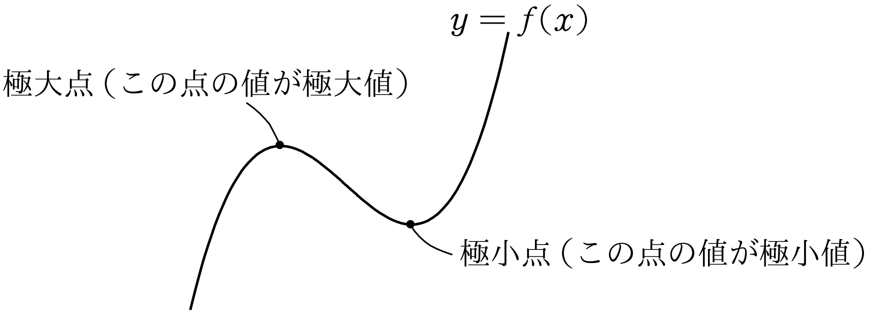
$f(x)$ は $x=a$ において 極小（きょくしょう） になるという．

そのときの $y=f(x)$ 上の点を 極小点（きょくしょうてん）といい，値 $f(a)$ を **極小値**（きょくしょうち）という．

さらに 極大値と極小値を合わせて **極値**（きょくち） という．

㊟補 $f(x)$ が $x=a$ で微分可能でなくても極大や極小になることがある．

㊟例



関数の増減表

関数 $f(x)$ の $f'(x)$ の符号を調べ，次のように表にしたものを**増減表**という．

x	$\cdots$	a	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$

$f(x)$ が区間 $x \leqq a$ で単調に減少，$a \leqq x$ で単調に増加することがわかる．

㊟補 グラフの概形は増減表からわかる．

3次関数

x の3次式で表される関数を x の **3次関数** という．

x の3次関数 y は a，b，c，d を定数として

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d \quad (a \neq 0)$$

の形で表される．

例 $y = x^3 - 6x^2 + 9x$

要

関数 $y = f(x)$ のグラフの概形を描くには**増減表**を作る．

例

3次関数 $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$ について，$y = f(x)$ のグラフを描く．

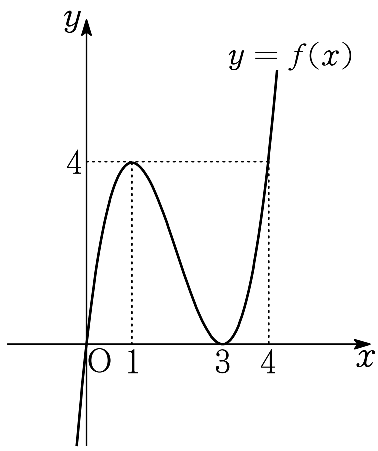
$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$$
$$= 3(x-1)(x-3)$$

$f(x)$ の増減表をかくと次になる．

x	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	4	↘	0	↗

極大値 4 ($x = 1$)，極小値 0 ($x = 3$)

グラフは右図．



3次関数が極値をもつ条件

3次関数 $f(x)$ が極値をもつ条件は

2次方程式 $f'(x) = 0$ が異なる2つの実数解をもつこと

考 3次関数 $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ は2次関数．

$f'(x) = 0$ が異なる2つの実数解をもつと，その前後で $f'(x)$ の符号が変わるので，極値をもつ．

$f'(x) = 0$ が異なる2つの実数解をもたないと，$f'(x)$ の符号は変わらないないので，極値をもたない．

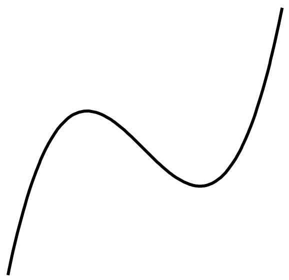
3次関数のグラフ

座標平面で

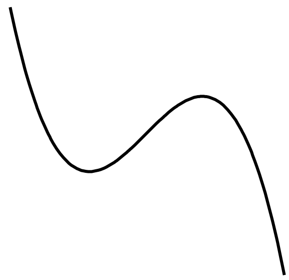
$$3\text{次関数 } y = ax^3 + bx^2 + cx + d \quad (a \neq 0)$$

のグラフは点対称な曲線であり，次のような概形になる．

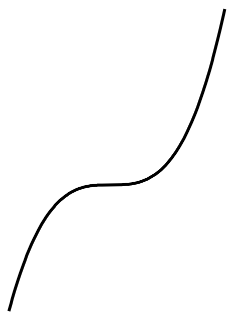
〔$a > 0$，極値ありのとき〕



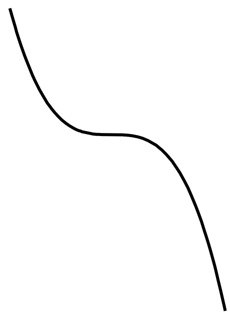
〔$a < 0$，極値ありのとき〕



〔$a > 0$，極値なしのとき〕



〔$a < 0$，極値なしのとき〕



このグラフについて

[1] 2次方程式 $f'(x) = 0$ が異なる2つの実数解 $x = \alpha,\ \beta(\alpha < \beta)$ をもつとき，$f(x)$ は極値をもち

$a > 0$ ならば

x	$\cdots$	α	$\cdots$	β	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	極大	↘	極小	↗

$a < 0$ ならば

x	$\cdots$	α	$\cdots$	β	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	極小	↗	極大	↘

[2] 2次方程式 $f'(x) = 0$ が異なる2つの実数解をもたないとき
$f(x)$ は極値をもたず

$a > 0$ ならば $f'(x) \geqq 0$ より $f(x)$ は単調に増加する．

$a < 0$ ならば $f'(x) \leqq 0$ より $f(x)$ は単調に減少する．

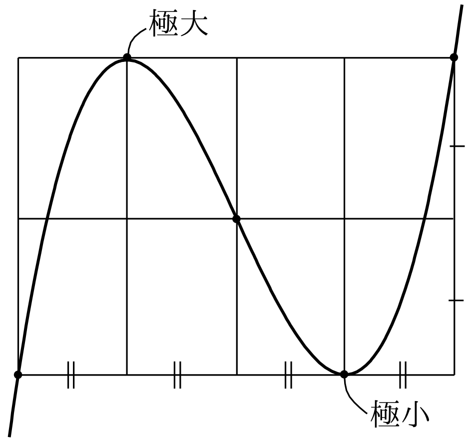
[3] グラフは点対称でその前後で 凸 性が変わる．

3次関数のグラフと8個の合同な長方形

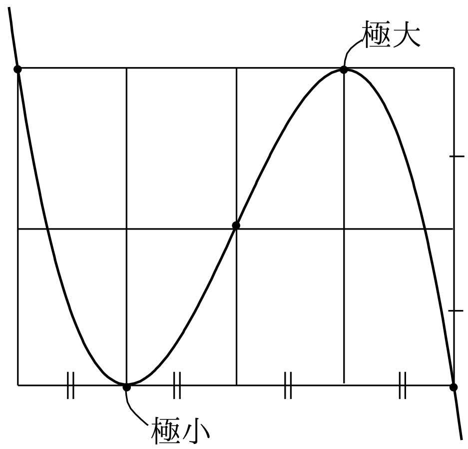
極値をもつ3次関数 $y = ax^3 + bx^2 + cx + d\ (a \neq 0)$ のグラフは

下図のように8個の合同な長方形の頂点を通る.

〔$a > 0$ のとき〕



〔$a < 0$ のとき〕



補 長方形を畳とみて,畳(たたみ)が8枚あることから「畳八帖(じょう)定理」と言う人がいる.

3 次方程式の実数解の個数

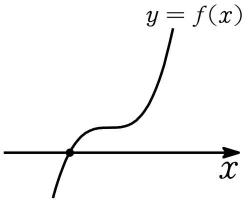
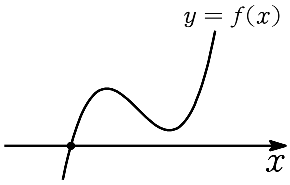
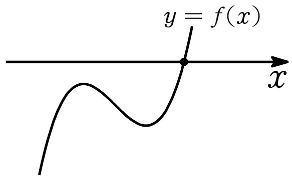
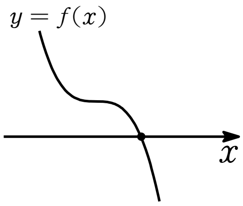
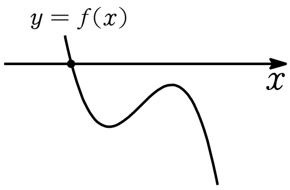
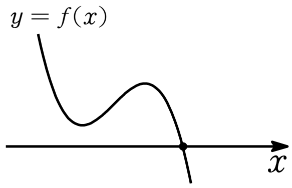
a, b, c, d は実数, $a \neq 0$ とする.

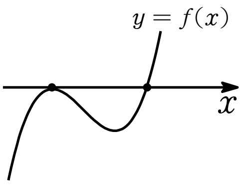
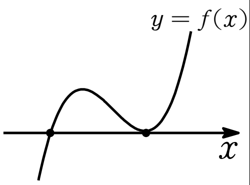
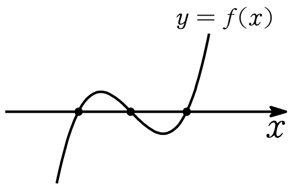
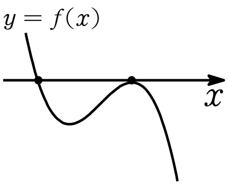
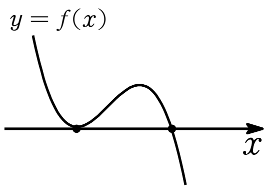
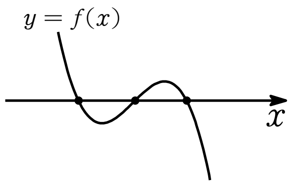
x についての 3 次方程式 $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ の実数解の個数は

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ とおいて

$$\begin{cases} y = f(x) \\ y = 0 \ (x \text{ 軸}) \end{cases}$$

の 2 つのグラフの共有点の個数から求まる.

実数解	1 個	
極値	なし	あり
$a > 0$		 
$a < 0$		 
極値の積		(極大値)×(極小値)> 0

実数解	2 個	3 個
極値	あり	あり
$a > 0$	 	
$a < 0$	 	
極値の積	(極大値)×(極小値)$= 0$	(極大値)×(極小値)< 0