数学 II　三角関数

~高校数学のまとめ~

教科書をもとに定義や定理を独自にパネル形式でまとめています．
何度も書き直し，加筆修正を繰り返しており，完成したものではありません．
人によっては不要な部分もあるでしょう．そういうときは読み飛ばしてください．

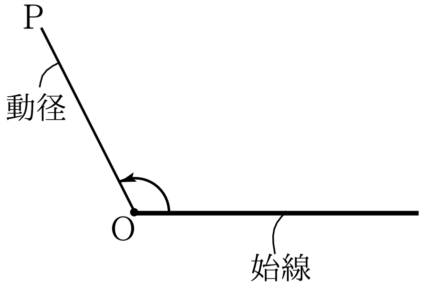
始線と動径

平面上で

点 O を中心として半直線 OP を回転させるとき

この半直線を **動径**（どうけい）という．

動径の始めの位置を示す半直線を **始線**（しせん）という．

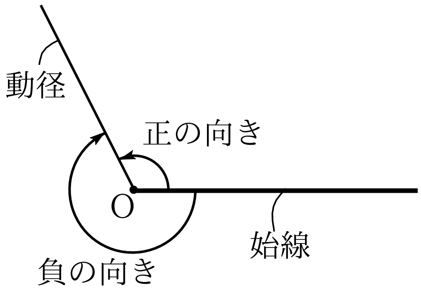


一般角

動径の回転には 2 つの向きがあり

時計の針の回転と逆の向きを **正の向き** という．

時計の針の回転と同じ向きを **負の向き** という．



さらに

動径を始線から正の向きに回転したときの角を **正の角** という．

動径を始線から負の向きに回転したときの角を **負の角** という．

回転の向きと大きさを表す量として，意味を広げて考えた角を **一般角**（いっぱんかく）という．

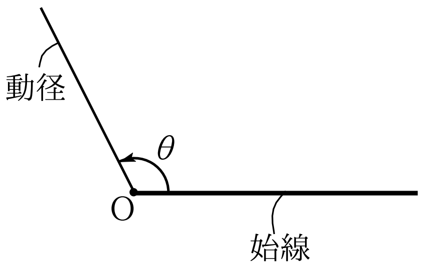
一般角と動径

始線から角 θ だけ回転した位置にある動径を **角 θ の動径** という．

とくに $\theta=\alpha$ が成り立つとき，動径 θ の一般角は

$$\theta=\alpha+360^\circ\times k \quad（k \text{ は整数}）$$

と表せて，これらの角を **動径の表す角** という．



角と象限

座標平面上で，x 軸の正の部分を始線とする角 θ の動径について

1. 角 θ の動径が第 1 象限にあるとき，θ を **第 1 象限の角** という.
2. 角 θ の動径が第 2 象限にあるとき，θ を **第 2 象限の角** という.
3. 角 θ の動径が第 3 象限にあるとき，θ を **第 3 象限の角** という.
4. 角 θ の動径が第 4 象限にあるとき，θ を **第 4 象限の角** という.

度数法

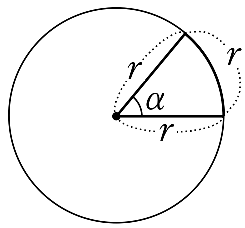
直角の $\dfrac{1}{90}$ である 1 度を単位とする角の大きさの表し方を **度数法**（どすうほう） という.

弧度法

1つの円において

半径と等しい長さの弧に対する中心角を単位とする角の表し方を

弧度法(こどほう)という．



右図のような半径 r の円において

弧の長さが r の弧に対する中心角 α は r に無関係に決まる．

この α を 1 rad(ラジアン) または 1弧度 といい，これを単位として角を表す．

ここで $1\,\mathrm{rad} = \dfrac{180^\circ}{\pi}$

補 $\dfrac{180^\circ}{\pi} = \left(\dfrac{180}{\pi}\right)^\circ$

考 1つの円において，弧の長さは中心角に比例するから

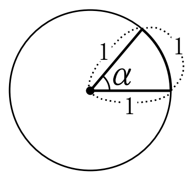
$\alpha : 360^\circ = r : 2\pi r$ すなわち $2\pi\alpha = 360^\circ$

これより $\alpha = \dfrac{180^\circ}{\pi}$（$\fallingdotseq 57.2958^\circ$）と r に無関係に決まる．

α は r に無関係に決まるので，とくに $r = 1$ として考えてもよい．

要

1 rad とは 半径が1，弧の長さが1の扇形の中心角の大きさ のことである．

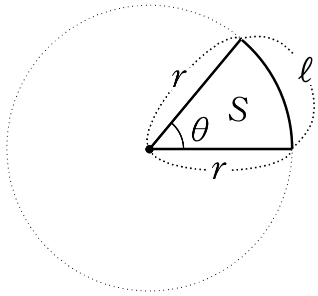


つまり，1 rad は右図の α であり $1\,\mathrm{rad} = \alpha$

半径が1の円周の長さは 2π なので $2\pi\,\mathrm{rad} = 360^\circ$

弧度法での扇形の弧の長さと面積

半径 r，中心角 θ (rad) の扇形（おうぎ）形 について



1 弧の長さを ℓ とすると

$$\ell = r\theta$$

2 面積を S とすると

$$S = \frac{1}{2}r^2\theta \quad \text{または} \quad S = \frac{1}{2}r\ell$$

(考) 1 弧の長さが中心角に比例するので

$$\ell = 2\pi r \times \frac{\theta}{2\pi} = r\theta$$

2 $S = \pi r^2 \times \dfrac{\theta}{2\pi} = \dfrac{1}{2}r^2\theta$

$$= \frac{1}{2}r \cdot r\theta = \frac{1}{2}r\ell$$

度数法と弧度法の関係

1 $x^\circ = \dfrac{x}{180}\pi$ rad

2 θ rad $= \left(\dfrac{180}{\pi}\theta\right)^\circ$

(考) 1 $1^\circ = \dfrac{\pi}{180}$ rad を x 倍する，

2 1 rad $= \left(\dfrac{180}{\pi}\right)^\circ$ を θ 倍する．

有名角の度数法と弧度法

度数法	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
弧度法	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π

度数法	210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°	360°
弧度法	$\frac{7}{6}\pi$	$\frac{5}{4}\pi$	$\frac{4}{3}\pi$	$\frac{3}{2}\pi$	$\frac{5}{3}\pi$	$\frac{7}{4}\pi$	$\frac{11}{6}\pi$	2π

(注) 基本的に，弧度法では単位の rad は省略して書く． $(\pi \text{ rad} = \pi)$

一般角での三角比

座標平面上で

原点 O を中心とする半径 1 の円（単位円）と

中心 O で x 軸の正の部分を始線 **角 θ の動径**

の交点を P とすると　$\mathrm{P}(\cos\theta,\ \sin\theta)$

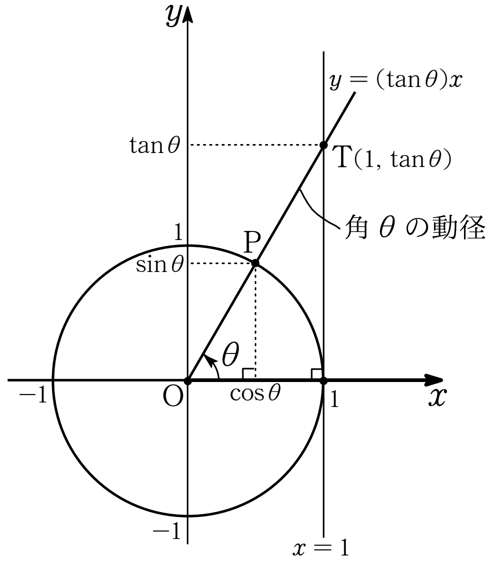
さらに

点 $(1,\ 0)$ における円の接線と直線 OP の交点を

T として

$\boxed{1}$ 直線 OP の傾きは $\tan\theta$

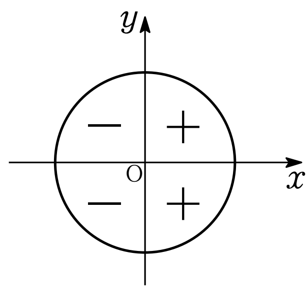
$\boxed{2}$ $\mathrm{T}(1,\ \tan\theta)$



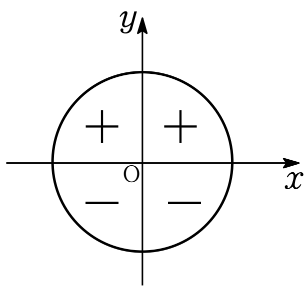
象限と三角比の正負

θ	第 1 象限	第 2 象限	第 3 象限	第 4 象限
$\cos\theta$	$+$	$-$	$-$	$+$
$\sin\theta$	$+$	$+$	$-$	$-$
$\tan\theta$	$+$	$-$	$+$	$-$

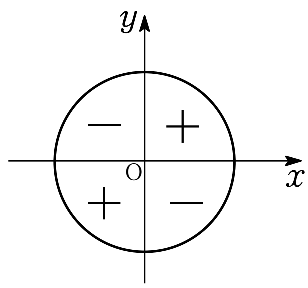
〔$\cos\theta$ の正負〕



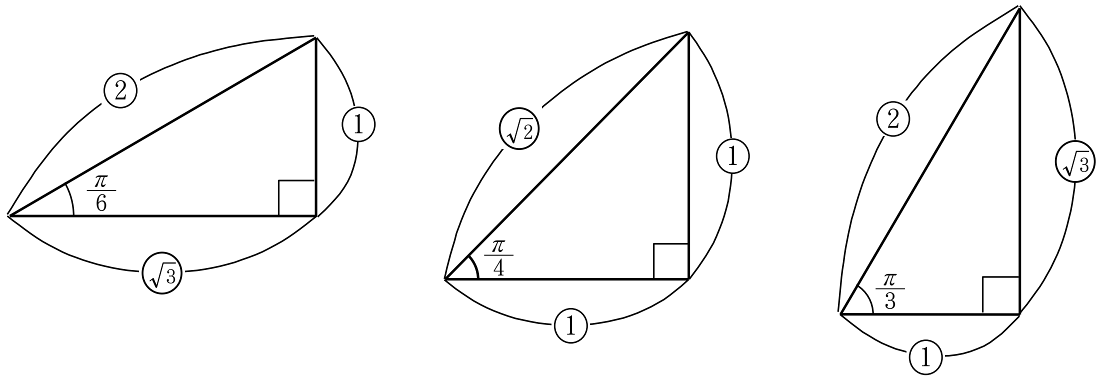
〔$\sin\theta$ の正負〕



〔$\tan\theta$ の正負〕



$\dfrac{\pi}{6}$, $\dfrac{\pi}{4}$, $\dfrac{\pi}{3}$ の三角比

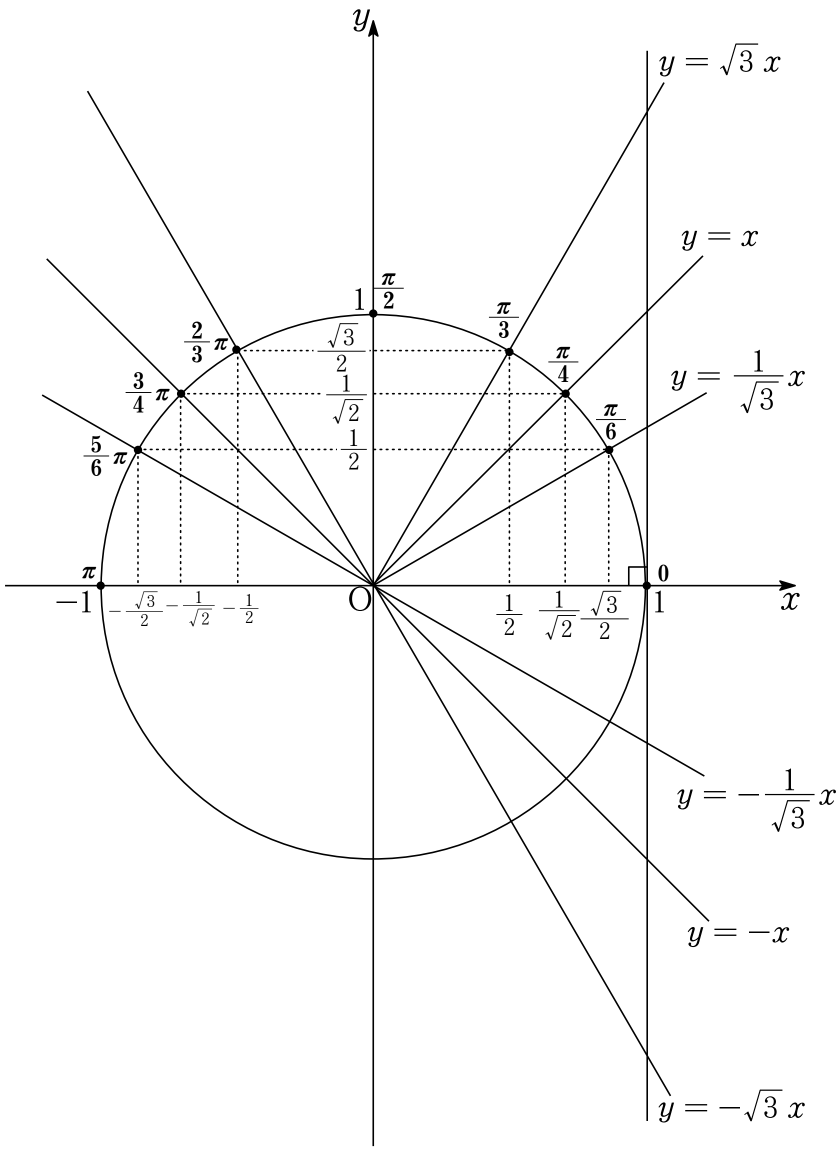


θ	$\dfrac{\pi}{6}$	$\dfrac{\pi}{4}$	$\dfrac{\pi}{3}$
$\cos\theta$	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	$\dfrac{1}{\sqrt{2}}$	$\dfrac{1}{2}$
$\sin\theta$	$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{1}{\sqrt{2}}$	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$
$\tan\theta$	$\dfrac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$

$0 \leqq \theta \leqq \pi$ の有名角の三角関数

θ	0	$\dfrac{\pi}{6}$	$\dfrac{\pi}{4}$	$\dfrac{\pi}{3}$	$\dfrac{\pi}{2}$	$\dfrac{2}{3}\pi$	$\dfrac{3}{4}\pi$	$\dfrac{5}{6}\pi$	π
$\cos\theta$	1	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	$\dfrac{1}{\sqrt{2}}$	$\dfrac{1}{2}$	0	$-\dfrac{1}{2}$	$-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$	$-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\sin\theta$	0	$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{1}{\sqrt{2}}$	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	$\dfrac{1}{\sqrt{2}}$	$\dfrac{1}{2}$	0
$\tan\theta$	0	$\dfrac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	$\times$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$	0

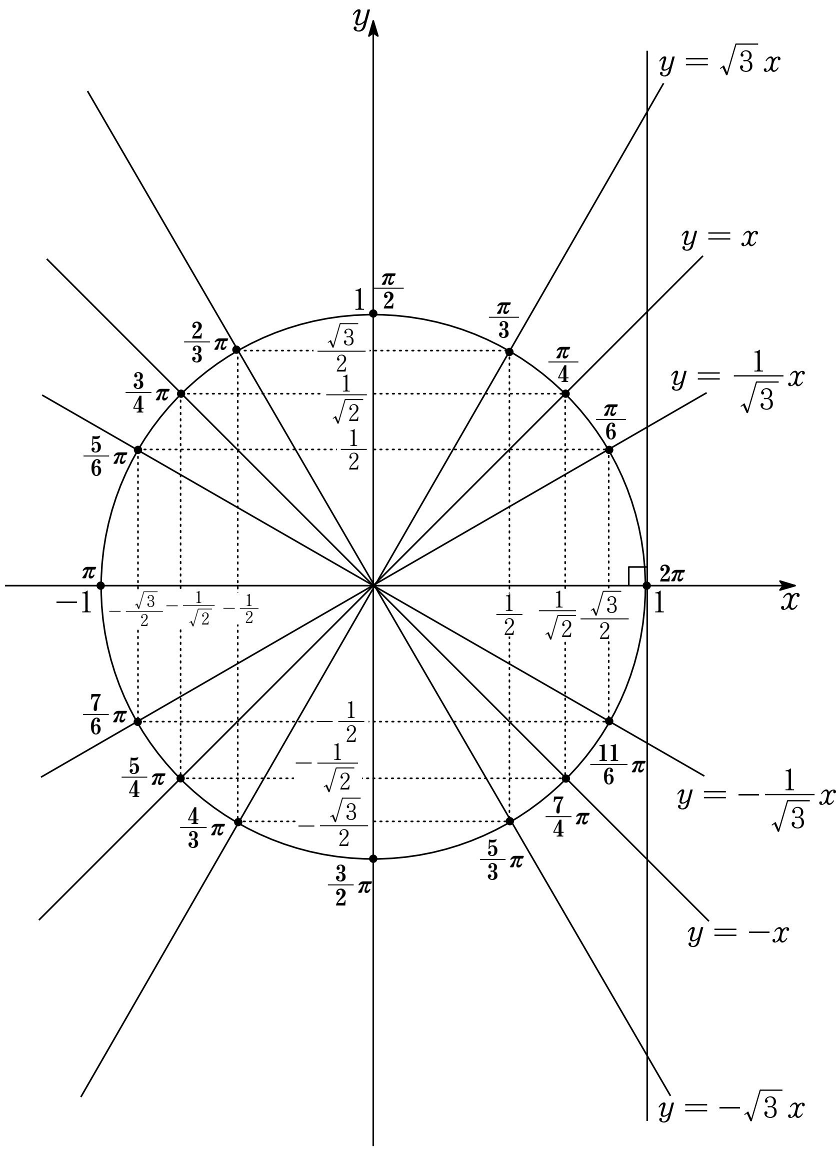
考 下図の単位円と動径を考える．
角は円周上近くに書くことにしている．



$\pi < \theta \leqq 2\pi$ の有名角の三角関数

θ	$\frac{7}{6}\pi$	$\frac{5}{4}\pi$	$\frac{4}{3}\pi$	$\frac{3}{2}\pi$	$\frac{5}{3}\pi$	$\frac{7}{4}\pi$	$\frac{11}{6}\pi$	2π
$\cos\theta$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\sin\theta$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{2}$	0
$\tan\theta$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	$\times$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

考 下図の単位円と動径を考える．
角は円周上近くに書くことにしている．

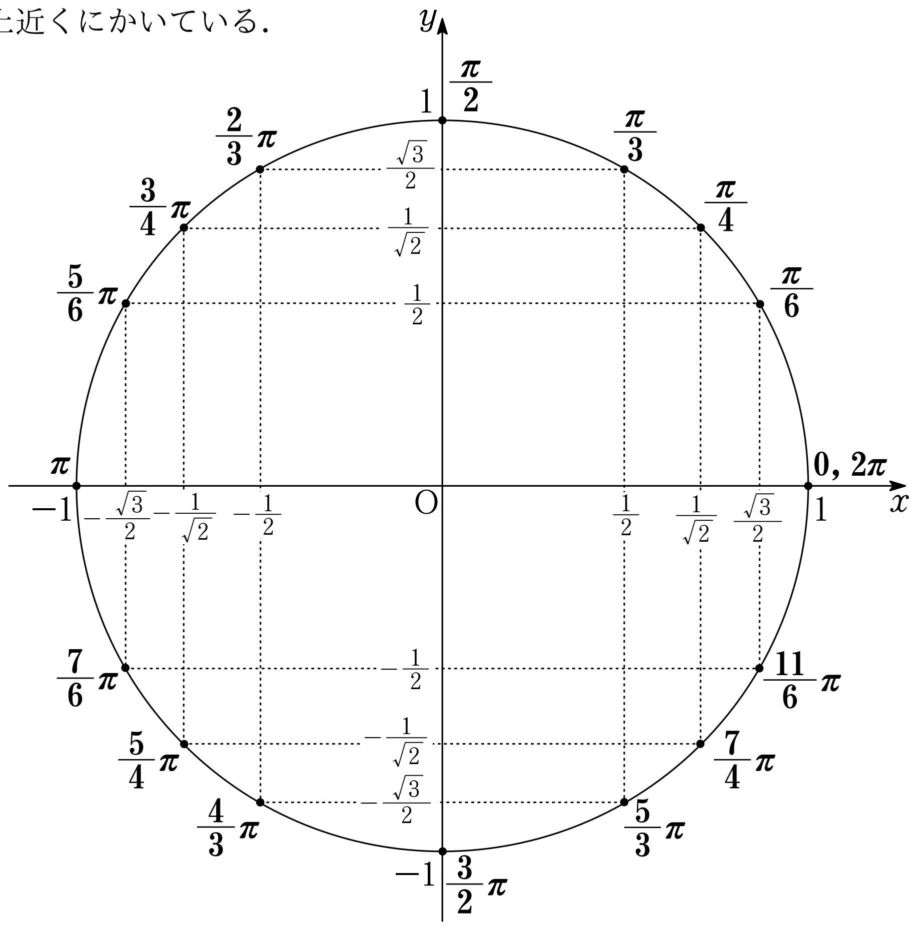


有名角の三角関数

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan\theta$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	$\times$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

θ	$\frac{7}{6}\pi$	$\frac{5}{4}\pi$	$\frac{4}{3}\pi$	$\frac{3}{2}\pi$	$\frac{5}{3}\pi$	$\frac{7}{4}\pi$	$\frac{11}{6}\pi$	2π
$\cos\theta$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\sin\theta$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{2}$	0
$\tan\theta$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	$\times$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

考 角は円周上近くにかいている.



三角関数の相互関係

$\boxed{1}$ $\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$

$\boxed{2}$ $\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ $(\cos\theta\neq 0)$

$\boxed{3}$ $1+\tan^2\theta=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$ $(\cos\theta\neq 0)$

$\boxed{4}$ $\dfrac{1}{\tan^2\theta}+1=\dfrac{1}{\sin^2\theta}$ $(\sin\theta\neq 0)$

考 $\boxed{3}$ $\boxed{1}$ の両辺 $\cos^2\theta$ で割って

$$1+\left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)^2=\frac{1}{\cos^2\theta}$$

$\boxed{2}$ より $1+\tan^2\theta=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$

$\boxed{4}$ $\boxed{1}$ の両辺 $\sin^2\theta$ で割って

$$\left(\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)^2+1=\frac{1}{\sin^2\theta}$$

$\boxed{2}$ より $\dfrac{1}{\tan^2\theta}+1=\dfrac{1}{\sin^2\theta}$

$\theta+2\pi\times$（整数）の三角関数

k を整数とする．

$\boxed{1}$ $\cos(\theta+2k\pi)=\cos\theta$

$\boxed{2}$ $\sin(\theta+2k\pi)=\sin\theta$

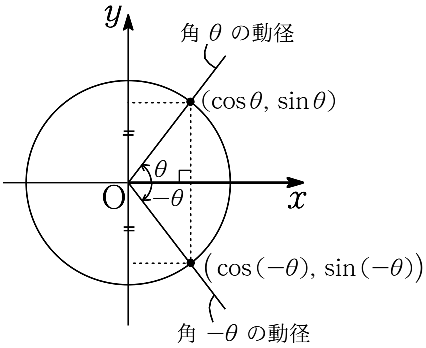
$\boxed{3}$ $\tan(\theta+2k\pi)=\tan\theta$

考 角 θ の動径と角 $\theta+2k\pi$ の動径は同じ．

$-\theta$ の三角関数

1. $\cos(-\theta) = \cos\theta$
2. $\sin(-\theta) = -\sin\theta$
3. $\tan(-\theta) = -\tan\theta$

考 角 θ の動径と角 $-\theta$ の動径は x 軸対称.
右図を考える.



$\theta+\pi$ の三角関数

1. $\cos(\theta+\pi) = -\cos\theta$
2. $\sin(\theta+\pi) = -\sin\theta$
3. $\tan(\theta+\pi) = \tan\theta$

考 角 θ の動径と角 $\theta+\pi$ の動径は原点対称.

$\pi-\theta$ の三角関数

1. $\cos(\pi-\theta) = -\cos\theta$
2. $\sin(\pi-\theta) = \sin\theta$
3. $\tan(\pi-\theta) = -\tan\theta$

考 角 θ の動径と角 $\pi-\theta$ の動径は y 軸対称.

$\dfrac{\pi}{2}-\theta$ の三角関数

$\boxed{1}$ $\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)=\sin\theta$

$\boxed{2}$ $\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)=\cos\theta$

$\boxed{3}$ $\tan\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)=\dfrac{1}{\tan\theta}$

考 角 θ の動径と角 $\dfrac{\pi}{2}-\theta$ の動径は $y=x$ に関して対称.

$\theta+\dfrac{\pi}{2}$ の三角関数

$\boxed{1}$ $\cos\left(\theta+\dfrac{\pi}{2}\right)=-\sin\theta$

$\boxed{2}$ $\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{2}\right)=\cos\theta$

$\boxed{3}$ $\tan\left(\theta+\dfrac{\pi}{2}\right)=-\dfrac{1}{\tan\theta}$

考 角 θ の動径と角 $\theta+\dfrac{\pi}{2}$ の動径は直交する.

周期関数

関数 $f(x)$ において，0 でない定数 p があり

等式 $f(x+p)=f(x)$ がすべての x に対して成り立つとき

$f(x)$ は p を 周期（しゅうき） とする 周期関数（しゅうきかんすう） という.

p が無数にあると一意に決まらないので，基本的に

p のうち 正で最小のものを 周期 とする.

㊞ $f(x)=\sin x$ において

$$f(x+2\pi)=f(x+4\pi)=f(x+6\pi)=\cdots=f(x)$$

となるので $f(x+p)=f(p)$ を満たす p は $p=2\pi,\ 4\pi,\ 6\pi,\ \cdots$ と p は無数にある.

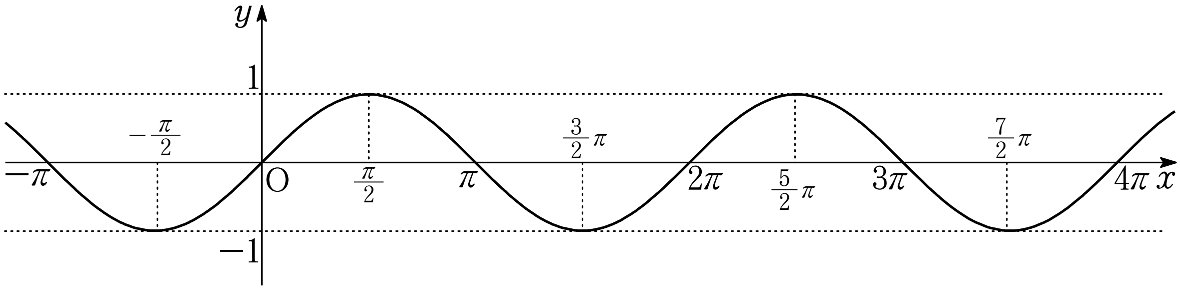
これらのうち正で最小のものは 2π であるから $f(x)=\sin x$ の周期は 2π とする.

正弦のグラフ

座標平面で

$$y = \sin x$$

のグラフは次のような概形になる．



このグラフについて

$\boxed{1}$ 値域は $-1 \leqq y \leqq 1$

$\boxed{2}$ 周期は 2π

$\boxed{3}$ 原点に関して対称

㊫ この曲線を正弦曲線（せいげんきょくせん）という．

㊫ 対称性がいろいろある．例えば，点 $(\pi, 0)$ や直線 $x = \dfrac{\pi}{2}$ に関して対称など．

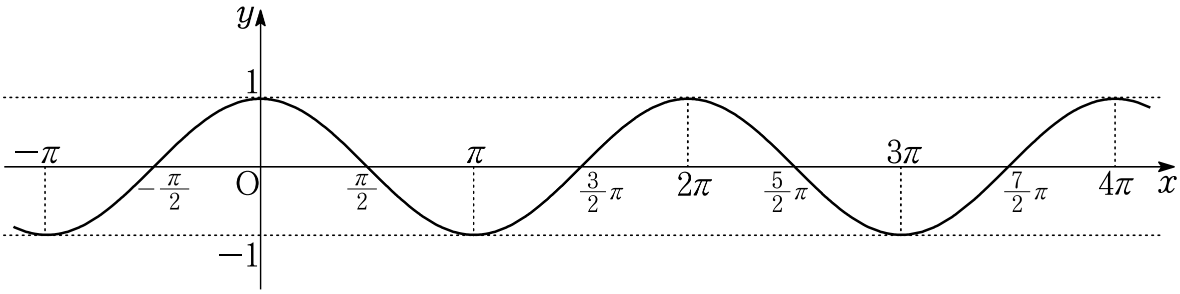
Ⓖ $y = \sin\theta$ のグラフ

余弦のグラフ

座標平面で

$$y = \cos x$$

のグラフは次のような概形になる.



このグラフについて

$\boxed{1}$ 値域は $-1 \leqq y \leqq 1$

$\boxed{2}$ 周期は 2π

$\boxed{3}$ y 軸に関して対称

㊟補 $y = \sin x$ のグラフと同じ形である.

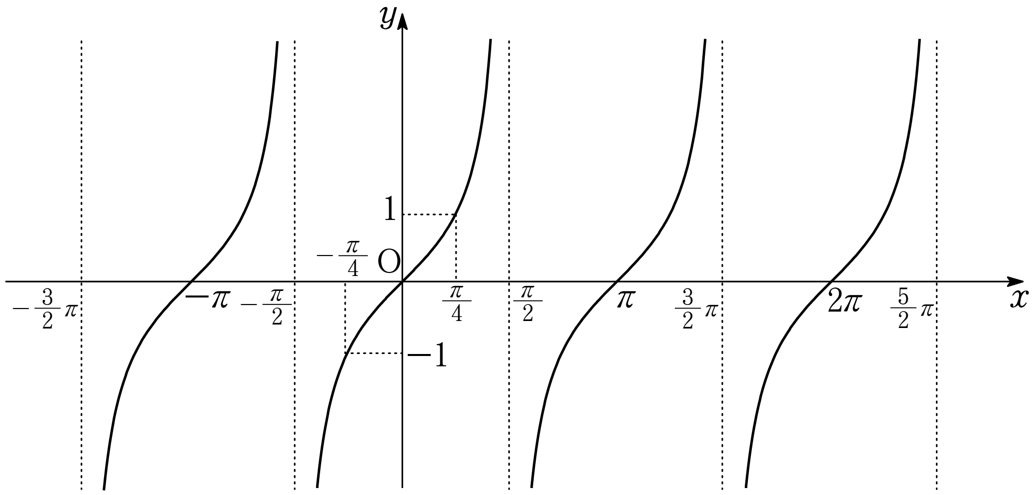
Ⓖ $y = \cos\theta$ のグラフ

正接のグラフ

座標平面で

$$y = \tan x$$

のグラフは次のような概形になる.



このグラフについて

1 値域は実数全体.

2 漸近線の方程式は $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ $(k = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \cdots)$

3 周期は π

4 原点に関して対称

Ⓖ $y = \tan\theta$ のグラフ

偶関数

x の関数 $f(x)$ において，常に $f(-x)=f(x)$ が成り立つとき

$f(x)$ を 偶関数（ぐうかんすう） という．

偶関数 $y=f(x)$ のグラフは y 軸に関して対称である．

例 x^2，x^4，$\cos x$，$|x|$，3，$\cdots$ は偶関数

奇関数

x の関数 $f(x)$ において，常に $f(-x)=-f(x)$ が成り立つとき

$f(x)$ を 奇関数（きかんすう） という．

奇関数 $y=f(x)$ のグラフは 原点に関して対称である．

例 x，x^3，$\sin x$，$\tan x$，$\cdots$ は奇関数

座標平面上における拡大縮小

座標平面上において

1 点 (a, b) を

y 軸をもとにして x 軸方向に m 倍 $(m > 0)$,

x 軸をもとにして y 軸方向に n 倍 $(n > 0)$

に拡大または縮小をすると

点 (ma, nb)

2 $y = f(x)$ を

y 軸をもとにして x 軸方向に m 倍 $(m > 0)$,

x 軸をもとにして y 軸方向に n 倍 $(n > 0)$

に拡大または縮小をすると

$$\frac{y}{n} = f\left(\frac{x}{m}\right) \iff y = n f\left(\frac{x}{m}\right)$$

とくに $m = n$ ならば 原点を中心とする拡大または縮小になる.

考 2 点 (x, y) を x 軸方向に m 倍, y 軸方向に n 倍に拡大または縮小した点を点 (X, Y) とすると

$$\begin{cases} mx = X \\ ny = Y \end{cases} \quad \text{すなわち} \quad \begin{cases} x = \dfrac{X}{m} \\ y = \dfrac{Y}{n} \end{cases}$$

の関係が成り立つことから

$$y = f(x) \iff \frac{Y}{n} = f\left(\frac{X}{m}\right)$$

すなわち, 点 (x, y) を x 軸方向に m 倍, y 軸方向に n 倍に拡大または縮小した点の集合は

$$\left\{(X, Y) \mid \frac{Y}{n} = f\left(\frac{X}{m}\right)\right\} = \left\{(x, y) \mid \frac{y}{n} = f\left(\frac{x}{m}\right)\right\}$$

要

座標平面で x を $\dfrac{X}{m}$ y を $\dfrac{Y}{n}$ に置き換えると

x 軸方向に m 倍, y 軸方向に n 倍に拡大または縮小される.

補 点 $\left(\dfrac{x}{m}, \dfrac{y}{n}\right)$ を x 軸方向に m 倍 $(m > 0)$, y 軸方向に n 倍 $(n > 0)$ 倍だけ拡大または縮小すると, 点 (x, y) となる.

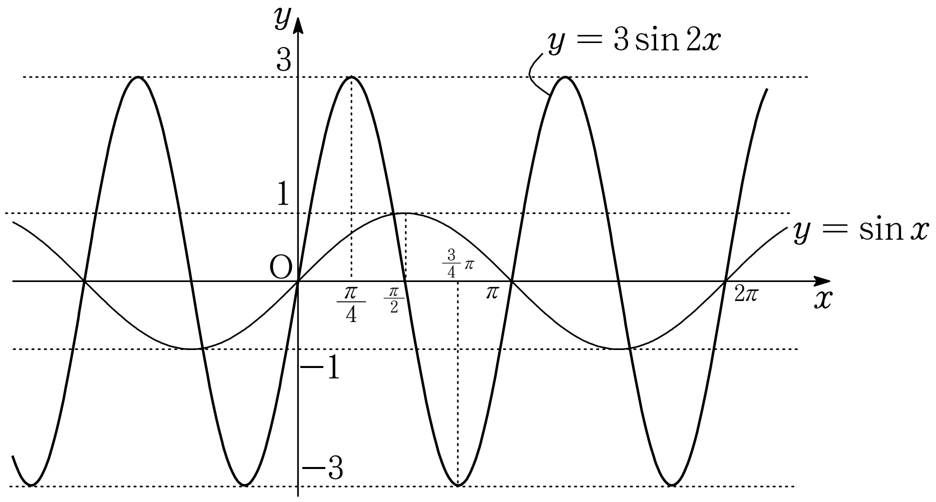
注 1 倍より大きいのが拡大, 1 倍より小さいのが縮小である.

例 $y=3\sin 2x$ のグラフについて

$$y=3\sin 2x \iff \frac{y}{3}=\sin\frac{x}{\frac{1}{2}}$$

$y=\sin x$ を x 軸方向に $\frac{1}{2}$ 倍だけ縮小，y 軸方向に 3 倍 だけ拡大したグラフ

なお，周期は $\sin x$ の周期 2π を $\frac{1}{2}$ 倍して $2\pi\times\frac{1}{2}=\pi$



三角関数の周期の公式

a，b，r を定数とし，$a>0$，$r\neq 0$ とする.

$\boxed{1}$ $f(x)=r\sin(ax+b)$ の 周期 は $\dfrac{2\pi}{a}$

$\boxed{2}$ $f(x)=r\cos(ax+b)$ の 周期 は $\dfrac{2\pi}{a}$

$\boxed{3}$ $f(x)=r\tan(ax+b)$ の 周期 は $\dfrac{\pi}{a}$

考 $\boxed{1}$ $f(x)=r\sin(ax+b)=r\sin\left\{a\left(x+\dfrac{b}{a}\right)\right\}$

$y=r\sin x$ を x 軸方向に $\dfrac{1}{a}$ 倍すると $y=r\sin ax$ で周期は $2\pi\times\dfrac{1}{a}=\dfrac{2\pi}{a}$

これを x 軸方向に $-\dfrac{b}{a}$ だけ平行移動したグラフが $y=f(x)$

（平行移動しても周期は変わらない）

例 $\boxed{1}$ $3\sin 2x$ の周期は $\dfrac{2\pi}{3}=\dfrac{2}{3}\pi$

$\boxed{2}$ $\cos\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)$ の周期は $\dfrac{2\pi}{2}=\pi$

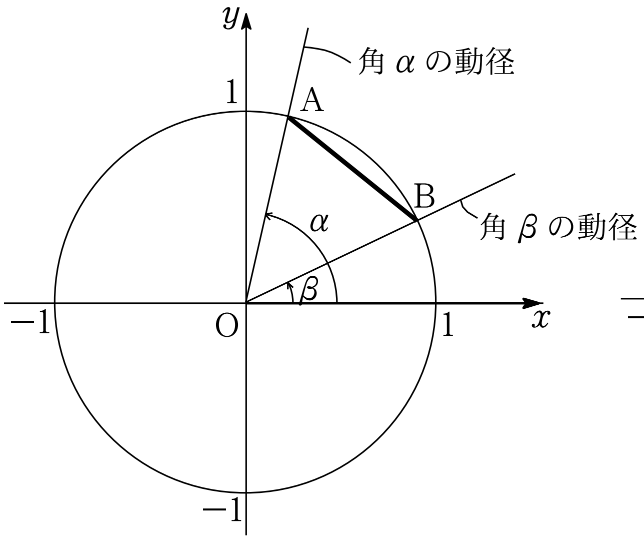
$\boxed{3}$ $\tan\left(\dfrac{1}{2}x\right)$ の周期は $\dfrac{\pi}{\frac{1}{2}}=2\pi$

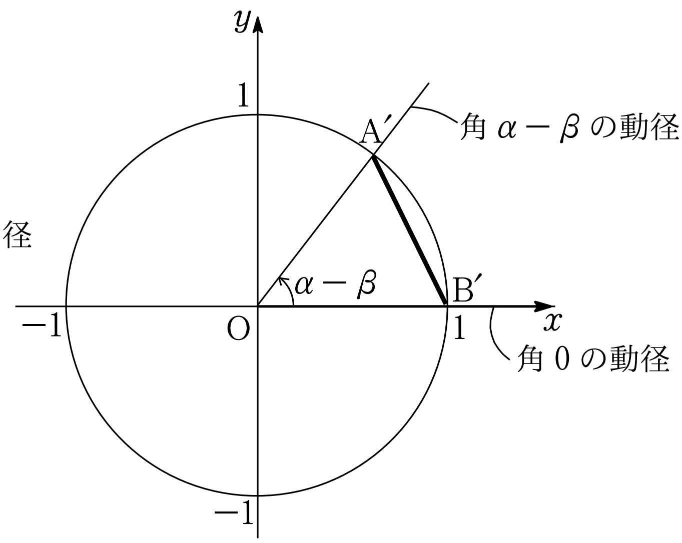
余弦の加法定理

$\boxed{1}$ $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

$\boxed{2}$ $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$

考 $\boxed{1}$





O を原点とする座標平面上で，x 軸の正の部分を始線として，
角 α の動径，角 β の動径と単位円との交点をそれぞれ A，B とすると

$\mathrm{A}(\cos\alpha, \sin\alpha)$，$\mathrm{B}(\cos\beta, \sin\beta)$

$$\begin{aligned}\mathrm{AB}^2&=(\cos\alpha-\cos\beta)^2+(\sin\alpha-\sin\beta)^2\\&=\cos^2\alpha+\sin^2\alpha+\cos^2\beta+\sin^2\beta-2(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)\\&=2-2(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)\ \cdots\cdots①\end{aligned}$$

2 点 A，B を原点 O を中心に $-\beta$ 回転した点をそれぞれ A′，B′ とする．
角 $\alpha-\beta$ の動径と角 0 の動径（始線）と単位円との交点がそれぞれ A′，B′ であるから

$\mathrm{A}'\big(\cos(\alpha-\beta), \sin(\alpha-\beta)\big)$，$\mathrm{B}'(1, 0)$

$$\begin{aligned}\mathrm{A'B'}^2&=\{\cos(\alpha-\beta)-1\}^2+\sin^2(\alpha-\beta)\\&=\cos^2(\alpha-\beta)+\sin^2(\alpha-\beta)+1-2\cos(\alpha-\beta)\\&=2-2\cos(\alpha-\beta)\ \cdots\cdots②\end{aligned}$$

$\mathrm{AB}=\mathrm{A'B'}$ であるから ①＝② として

$2-2(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)=2-2\cos(\alpha-\beta)$

よって $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

$\boxed{2}$ $\boxed{1}$ で β を $-\beta$ と置き換えて

$$\begin{aligned}\cos(\alpha+\beta)&=\cos\alpha\cos(-\beta)-\sin\alpha\sin(-\beta)\\&=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta\end{aligned}$$

正弦の加法定理

$\boxed{1}$ $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$

$\boxed{2}$ $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$

考 $\boxed{1}$

$$\begin{aligned}\sin(\alpha+\beta)&=\cos\left\{\frac{\pi}{2}-(\alpha+\beta)\right\}\\&=\cos\left\{\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-\beta\right\}\\&=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cos\beta+\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\sin\beta\quad(\because\ \text{余弦の加法定理})\\&=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta\end{aligned}$$

$\boxed{2}$ $\boxed{1}$ で β を $-\beta$ として

$$\sin\{\alpha+(-\beta)\}=\sin\alpha\sin(-\beta)+\cos\alpha\sin(-\beta)$$

よって $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$

正接の加法定理

$\boxed{1}$ $\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$

$\boxed{2}$ $\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$

考 $\boxed{1}$

$$\begin{aligned}\tan(\alpha+\beta)&=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}\\&=\frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}\quad(\because\ \text{正弦・余弦の加法定理})\\&=\frac{\dfrac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}{\dfrac{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}\quad(\because\ \text{分母と分子を}\cos\alpha\cos\beta\text{でわった})\\&=\frac{\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}}{1-\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot\dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}}\\&=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}\end{aligned}$$

$\boxed{2}$ $\boxed{1}$ で β を $-\beta$ として

$$\tan\{\alpha+(-\beta)\}=\frac{\tan\alpha+\tan(-\beta)}{1-\tan\alpha\tan(-\beta)}$$

よって $\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$

補 $\boxed{1}$ と同様にして $\boxed{2}$ も示すことができる.

2倍角の公式

$\boxed{1}$ $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$

$\boxed{2}$ $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$

$\boxed{3}$ $\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta$

$\boxed{4}$ $\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$

$\boxed{5}$ $\tan 2\theta = \dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$

考 $\boxed{1}$

$$\begin{aligned}\sin 2\theta &= \sin(\theta+\theta)\\ &= \sin\theta\cos\theta + \cos\theta\sin\theta \quad (\because \text{正弦の加法})\\ &= 2\sin\theta\cos\theta\end{aligned}$$

$\boxed{2}$

$$\begin{aligned}\cos 2\theta &= \cos(\theta+\theta)\\ &= \cos\theta\cos\theta - \sin\theta\sin\theta \quad (\because \text{余弦の加法定理})\\ &= \cos^2\theta - \sin^2\theta\end{aligned}$$

$\boxed{3}$ $\boxed{2}$ に $\cos^2\theta = 1-\sin^2\theta$ を代入して

$$\begin{aligned}\cos 2\theta &= \underline{1-\sin^2\theta} - \sin^2\theta\\ &= 1 - 2\sin^2\theta\end{aligned}$$

$\boxed{4}$ $\boxed{2}$ に $\sin^2\theta = 1-\cos^2\theta$ を代入して

$$\begin{aligned}\cos 2\theta &= \cos^2\theta - \underline{(1-\cos^2\theta)}\\ &= 2\cos^2\theta - 1\end{aligned}$$

$\boxed{5}$

$$\begin{aligned}\tan 2\theta &= \tan(\theta+\theta)\\ &= \frac{\tan\theta+\tan\theta}{1-\tan\theta\tan\theta} \quad (\because \text{正接の加法定理})\\ &= \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}\end{aligned}$$

半角の公式

$\boxed{1}$ $\sin^2\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{1-\cos\theta}{2}$

$\boxed{2}$ $\cos^2\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{1+\cos\theta}{2}$

$\boxed{3}$ $\tan^2\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}$

考 $\boxed{1}$ $\boxed{\text{2 倍角の公式}}$より $\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha$

すなわち $\sin^2\alpha=\dfrac{1-\cos 2\alpha}{2}$

この式で $\alpha=\dfrac{\theta}{2}$ とおくと $\sin^2\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{1-\cos\theta}{2}$

$\boxed{2}$ $\boxed{\text{2 倍角の公式}}$より $\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1$

すなわち $\cos^2\alpha=\dfrac{1+\cos 2\alpha}{2}$

この式で $\alpha=\dfrac{\theta}{2}$ とおくと $\cos^2\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{1+\cos\theta}{2}$

$\boxed{3}$
$$\tan^2\frac{\theta}{2}=\frac{\sin^2\frac{\theta}{2}}{\cos^2\frac{\theta}{2}}=\frac{\frac{1-\cos\theta}{2}}{\frac{1+\cos\theta}{2}}\quad(\because \boxed{1},\ \boxed{2})=\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}$$

半角の準公式

$\boxed{1}$ $\sin^2\alpha=\dfrac{1-\cos 2\alpha}{2}$

$\boxed{2}$ $\cos^2\alpha=\dfrac{1+\cos 2\alpha}{2}$

$\boxed{3}$ $\tan^2\alpha=\dfrac{1-\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}$

考 $\boxed{\text{半角の公式}}$で $\theta=2\alpha$ としている.

3倍角の公式

$\boxed{1}$ $\sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$

$\boxed{2}$ $\cos 3\theta = -3\cos\theta + 4\cos^3\theta$

㊄ $\boxed{1}$ $\sin 3\theta = \sin(2\theta + \theta)$

$= \sin 2\theta\cos\theta + \cos 2\theta\sin\theta$ $\left(\because \boxed{\text{正弦の加法定理}}\right)$

$= 2\sin\theta\cos^2\theta + (1 - 2\sin^2\theta)\sin\theta$ $\left(\because \boxed{\text{2倍角の公式}}\right)$

$= 2\sin\theta(1 - \sin^2\theta) + \sin\theta - 2\sin^3\theta$

$= 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$

$\boxed{2}$ $\cos 3\theta = \cos(2\theta + \theta)$

$= \cos 2\theta\cos\theta - \sin 2\theta\sin\theta$ $\left(\because \boxed{\text{余弦の加法定理}}\right)$

$= (2\cos^2\theta - 1)\cos\theta - 2\sin^2\theta\cos\theta$ $\left(\because \boxed{\text{2倍角の公式}}\right)$

$= 2\cos^3\theta - \cos\theta - 2(1 - \cos^2\theta)\cos\theta$

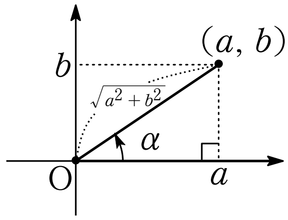
$= -3\cos\theta + 4\cos^3\theta$

正弦の合成

a、b を $(a,\, b) \neq (0,\, 0)$ となる実数の定数とする.

$$a\sin\theta + b\cos\theta = \sqrt{a^2+b^2}\,\sin(\theta+\alpha)$$

ただし $\cos\alpha = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\sin\alpha = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$



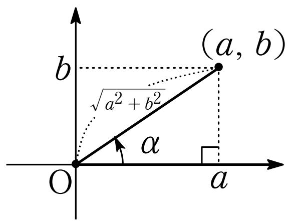
考
$$\begin{aligned} a\sin\theta + b\cos\theta &= \sqrt{a^2+b^2}\left(\sin\theta\cdot\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} + \cos\theta\cdot\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right) \\ &= \sqrt{a^2+b^2}(\sin\theta\cos\alpha + \cos\theta\sin\alpha) \\ &= \sqrt{a^2+b^2}\,\sin(\theta+\alpha) \quad (\because \text{正弦の加法定理}) \end{aligned}$$

余弦の合成

a、b を $(a,\, b) \neq (0,\, 0)$ となる実数の定数とする.

$$a\cos\theta + b\sin\theta = \sqrt{a^2+b^2}\,\cos(\theta-\alpha)$$

ただし $\cos\alpha = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\sin\alpha = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$



考
$$\begin{aligned} a\cos\theta + b\sin\theta &= \sqrt{a^2+b^2}\left(\cos\theta\cdot\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} + \sin\theta\cdot\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right) \\ &= \sqrt{a^2+b^2}(\cos\theta\cos\alpha + \sin\theta\sin\alpha) \\ &= \sqrt{a^2+b^2}\,\cos(\theta-\alpha) \quad (\because \text{余弦の加法定理}) \end{aligned}$$

積から和・差の公式

$\boxed{1}$ $\sin\alpha\cos\beta = \dfrac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\}$

$\boxed{2}$ $\cos\alpha\sin\beta = \dfrac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)\}$

$\boxed{3}$ $\cos\alpha\cos\beta = \dfrac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\}$

$\boxed{4}$ $\sin\alpha\sin\beta = -\dfrac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)\}$

考 正弦・余弦の加法定理より

$\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta=\sin(\alpha+\beta)$ ……①

$\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta=\sin(\alpha-\beta)$ ……②

$\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta=\cos(\alpha+\beta)$ ……③

$\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta=\cos(\alpha-\beta)$ ……④

$\boxed{1}$ (①＋②)$\times\dfrac{1}{2}$ として $\sin\alpha\cos\beta=\dfrac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\}$

$\boxed{2}$ (①－②)$\times\dfrac{1}{2}$ として $\cos\alpha\sin\beta=\dfrac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)\}$

$\boxed{3}$ (③＋④)$\times\dfrac{1}{2}$ として $\cos\alpha\cos\beta=\dfrac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\}$

$\boxed{4}$ (③－④)$\times\dfrac{1}{2}$ として $\sin\alpha\sin\beta=-\dfrac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)\}$

和・差から積の公式

$\boxed{1}$ $\sin A + \sin B = 2\sin\dfrac{A+B}{2}\cos\dfrac{A-B}{2}$

$\boxed{2}$ $\sin A - \sin B = 2\cos\dfrac{A+B}{2}\sin\dfrac{A-B}{2}$

$\boxed{3}$ $\cos A + \cos B = 2\cos\dfrac{A+B}{2}\cos\dfrac{A-B}{2}$

$\boxed{4}$ $\cos A - \cos B = -2\sin\dfrac{A+B}{2}\sin\dfrac{A-B}{2}$

考 正弦・余弦の加法定理 より

$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$ ……①

$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$ ……②

$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$ ……③

$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$ ……④

$\begin{cases}\alpha+\beta = A \\ \alpha-\beta = B\end{cases}$ とおくと $\begin{cases}\alpha = \dfrac{A+B}{2} \\ \beta = \dfrac{A-B}{2}\end{cases}$ ……⑤

$\boxed{1}$ ①＋② として $\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta) = 2\sin\alpha\cos\beta$

⑤ より $\sin A + \sin B = 2\sin\dfrac{A+B}{2}\cos\dfrac{A-B}{2}$

$\boxed{2}$ ①－② として $\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta) = 2\cos\alpha\sin\beta$

⑤ より $\sin A - \sin B = 2\cos\dfrac{A+B}{2}\sin\dfrac{A-B}{2}$

$\boxed{3}$ ③＋④ として $\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta) = 2\cos\alpha\cos\beta$

⑤ より $\cos A + \cos B = 2\cos\dfrac{A+B}{2}\cos\dfrac{A-B}{2}$

$\boxed{4}$ ③－④ として $\cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta) = -2\sin\alpha\sin\beta$

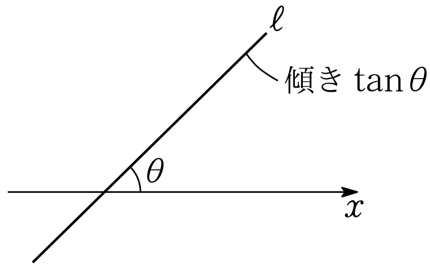
⑤ より $\cos A - \cos B = -2\sin\dfrac{A+B}{2}\sin\dfrac{A-B}{2}$

正接と傾き

座標平面で

x 軸正方向と直線 ℓ のなす角を $\theta\left(\theta \neq \frac{\pi}{2}\right)$ とすると

ℓ の傾きは $\tan\theta$



傾きのある 2 直線のなす角と正接

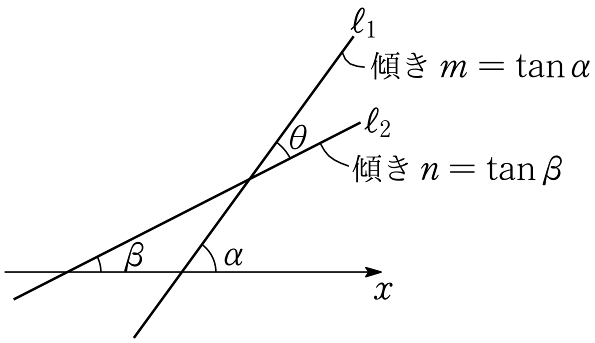
座標平面に

平行でない 2 本の直線 ℓ_1，ℓ_2 がある．

ℓ_1，ℓ_2 の傾きをそれぞれ m，n とし

x 軸正方向とのなす角をそれぞれ α，β

ただし $\alpha > \beta$ とする．



このとき ℓ_1 と ℓ_2 のなす角を $\theta\ (0 < \theta < \pi)$ として，次が成り立つ．

$\boxed{1}$ $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ つまり $\ell_1 \perp \ell_2$ のとき $mn = -1$

$\boxed{2}$ $\theta \neq \dfrac{\pi}{2}$ のとき $\tan\theta = \dfrac{m-n}{1+mn}$

考 $\boxed{1}$ 直交条件

$\boxed{2}$ $\tan\alpha = m$，$\tan\beta = n$，$\theta = \alpha - \beta$ であるから

$$\tan\theta = \tan(\alpha-\beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta} = \frac{m-n}{1+mn}$$

要

傾きをもつ 2 本の直線

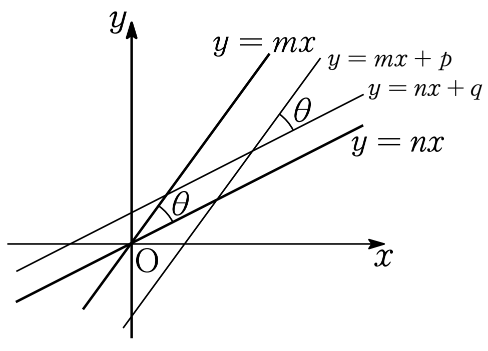
$$\begin{cases} y = mx + p \\ y = nx + q \end{cases}$$

のなす角 θ は

$$\begin{cases} y = mx \\ y = nx \end{cases}$$

のなす角 θ に等しい．

すなわち 2 本の直線のなす角は傾きだけで決まる．



等しい余弦の角

$$\cos X = \cos Y$$

を満たすとき

$$X = \pm Y + 2k\pi \ \ (k \text{ は整数})$$

㊊ $\cos X = \cos \frac{\pi}{3}$　を満たすとき

$X = \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi$（$k$ は整数）

等しい正弦の角

$$\sin X = \sin Y$$

を満たすとき

$$X = Y + 2k\pi \quad \text{または} \quad X = \pi - Y + 2k\pi \ \ (k \text{ は整数})$$

㊊ $\sin X = \sin \frac{\pi}{3}$　を満たすとき

$X = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$　または　$X = \frac{2}{3}\pi + 2k\pi$（$k$ は整数）

正接と倍角の関係

$\tan\theta = t$ とおくと

$\boxed{1}$ $\sin 2\theta = \dfrac{2t}{1+t^2}$

$\boxed{2}$ $\cos 2\theta = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$

$\boxed{3}$ $\tan 2\theta = \dfrac{2t}{1-t^2}$ （$t \fallingdotseq \pm 1$）

考 $\boxed{1}$
$$\begin{aligned}\sin 2\theta &= \frac{\sin 2\theta}{1}\\ &= \frac{2\sin\theta\cos\theta}{\cos^2\theta+\sin^2\theta}\\ &= \frac{2\cdot\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}}{1+\left(\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)^2} \quad (\because \text{分母, 分子を } \cos^2\theta \text{ で割った})\\ &= \frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}\\ &= \frac{2t}{1+t^2}\end{aligned}$$

$\boxed{2}$
$$\begin{aligned}\cos 2\theta &= \frac{\cos 2\theta}{1}\\ &= \frac{\cos^2\theta-\sin^2\theta}{\cos^2\theta+\sin^2\theta}\\ &= \frac{1-\left(\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)^2}{1+\left(\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)^2} \quad (\because \text{分母, 分子を } \cos^2\theta \text{ で割った})\\ &= \frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}\\ &= \frac{1-t^2}{1+t^2}\end{aligned}$$

$\boxed{3}$
$$\begin{aligned}\tan 2\theta &= \frac{\sin 2\theta}{\cos 2\theta}\\ &= \frac{1+t^2}{1-t^2} \quad (\because \boxed{1}, \boxed{2})\end{aligned}$$

別 $1+\tan^2\theta = \dfrac{1}{\cos^2\theta}$ より $\cos^2\theta = \dfrac{1}{1+t^2}$

$\boxed{2}$ $\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 2\cdot\dfrac{1}{1+t^2} - 1 = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$

$\boxed{3}$ 2 倍角の公式より $\tan 2\theta = \dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta} = \dfrac{2t}{1-t^2}$

$\boxed{1}$ $\sin 2\theta = \cos 2\theta\cdot\tan 2\theta = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}\cdot\dfrac{2t}{1-t^2} = \dfrac{2t}{1+t^2}$

正接の半角の関係

$\tan\dfrac{\theta}{2}=t$ とおくと

1 $\sin\theta=\dfrac{2t}{1+t^2}$

2 $\cos\theta=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$

3 $\tan\theta=\dfrac{2t}{1-t^2}$ （$t \fallingdotseq \pm 1$）

考 正接と倍角の関係 と同じ