数学B　空間ベクトル

~高校数学のまとめ~

教科書をもとに定義や定理を独自にパネル形式でまとめています．
何度も書き直し，加筆修正を繰り返しており，完成したものではありません．
人によっては不要な部分もあるでしょう．そういうときは読み飛ばしてください．

座標空間

空間に点Oをとり，Oで互いに直交する3つの座標軸を定める．

これらをそれぞれ x 軸，y 軸，z 軸 という．

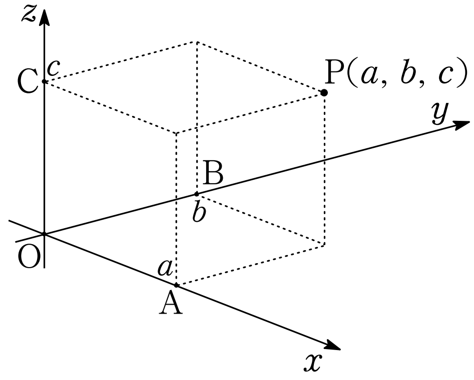
またOを 原点 という．

さらに

$\boxed{1}$ x 軸と y 軸で定まる平面を xy 平面という．

$\boxed{2}$ y 軸と z 軸で定まる平面を yz 平面という．

$\boxed{3}$ z 軸と x 軸で定まる平面を zx 平面という．



$\boxed{1}$，$\boxed{2}$，$\boxed{3}$ をまとめて 座標平面（ざひょう）という．

空間の点Pに対して，点Pを通り各座標軸に垂直な直線が

x 軸，y 軸，z 軸と交わる点を，それぞれA，B，Cとする．

A，B，Cの各座標軸上での座標がそれぞれ a，b，c のとき，

3つの実数の組 (a, b, c) を 点Pの座標 といい $\mathrm{P}(a, b, c)$ とかく．

このとき a を x 座標，b を y 座標，c を z 座標 という．

また $\mathrm{O}(0, 0, 0)$，$\mathrm{A}(a, 0, 0)$，$\mathrm{B}(0, b, 0)$，$\mathrm{C}(0, 0, c)$ である．

座標軸の定められた空間を 座標空間（ざひょうくうかん）という．

とくに何も条件がないときは，座標空間の座標軸は x 軸，y 軸，z 軸として考える．

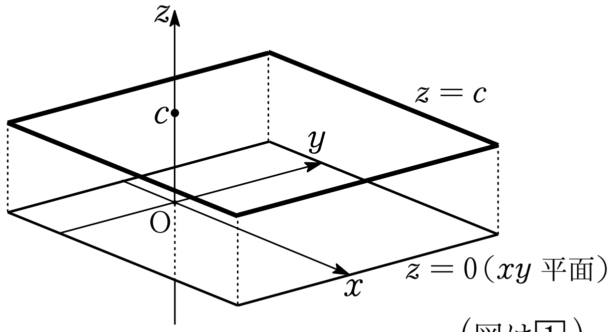
座標平面に平行な平面の方程式

座標空間において

$\boxed{1}$ xy 平面の方程式は $z=0$

$\boxed{2}$ yz 平面の方程式は $x=0$

$\boxed{3}$ zx 平面の方程式は $y=0$



座標平面に平行な平面の方程式について （図は$\boxed{1}$）

$\boxed{1}$ xy 平面に平行で z 軸上の点 $(0,\ 0,\ c)$ を通る平面の方程式は $z=c$

$\boxed{2}$ yz 平面に平行で x 軸上の点 $(a,\ 0,\ 0)$ を通る平面の方程式は $x=a$

$\boxed{3}$ zx 平面に平行で y 軸上の点 $(0,\ b,\ 0)$ を通る平面の方程式は $y=b$

要

空間ベクトルも平面ベクトルと同じ性質をもつ.

空間ベクトルの１次結合

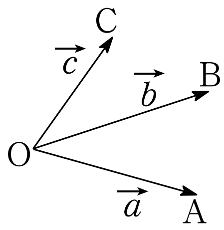
3 つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ に対し，実数 s，t，u を用いて

$s\vec{a}+t\vec{b}+u\vec{c}$ と表されることを $\vec{a}$ と $\vec{b}$ と $\vec{c}$ の **1次結合**（いちじけつごう）という．

空間の１次独立なベクトル

3 つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ が **1次独立**（いちじどくりつ）であるとは

次の条件を満たすことである．



$\boxed{1}$ $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ は同一平面上にない

$\boxed{2}$ $\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ とおくと

4 点 O，A，B，C が同一平面上にない

$\boxed{3}$ $\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ とおくと 四面体 OABC が存在する

$\boxed{4}$ 実数 x，y，z に対し

$x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c}=\vec{0}$ ならば $x=0$ かつ $y=0$ かつ $z=0$

㊟ 補 $\boxed{1}$，$\boxed{2}$，$\boxed{3}$，$\boxed{4}$ は同値

注「$\vec{a}\neq\vec{0}$ かつ $\vec{b}\neq\vec{0}$ かつ $\vec{c}\neq\vec{0}$ かつ $\vec{a}\not\parallel\vec{b}$ かつ $\vec{b}\not\parallel\vec{c}$ かつ $\vec{c}\not\parallel\vec{a}$」とするのは間違い．

話 $\boxed{4}$ が一般的な定義です．高校の教科書では定義していない

（定義している教科書が確認できてない）

1 次独立な空間ベクトルの性質

$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ は 1 次独立，x，y，z，s，t，u を実数として次が成り立つ.

$\boxed{1}$ $$x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c}=\vec{0} \iff \begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=0 \end{cases}$$

$\boxed{2}$ $$x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c}=s\vec{a}+t\vec{b}+u\vec{c} \iff \begin{cases} x=s \\ y=t \\ z=u \end{cases}$$

空間ベクトルの 1 次独立と 1 次結合

空間内の任意のベクトル $\vec{p}$ は，1 次独立なベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて

$$\vec{p}=x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c}\ \text{（}x,\ y,\ z\text{ は実数）}$$

の形でただ 1 通りで表される.

空間ベクトルの成分表示

座標空間において，点 O を原点，点 $\mathrm{E}_1(1,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{E}_2(0,\ 1,\ 0)$，$\mathrm{E}_3(0,\ 0,\ 1)$

とする x 軸，y 軸，z 軸の正の向きと同じ向きの単位ベクトルを

座標軸に関する基本ベクトルといい，それぞれ

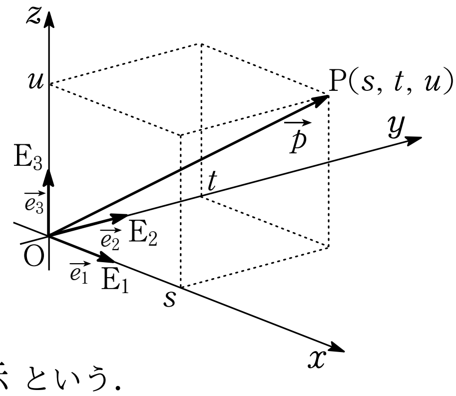
$$\vec{e_1}=\overrightarrow{\mathrm{OE}_1},\ \vec{e_2}=\overrightarrow{\mathrm{OE}_2},\ \vec{e_3}=\overrightarrow{\mathrm{OE}_3}$$

とする．

このとき $\vec{p}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ となる点 $\mathrm{P}(s,\ t,\ u)$ をとると

$$\vec{p}=s\vec{e_1}+t\vec{e_2}+u\vec{e_3}$$

とただ 1 通りで表せて，これを 基本ベクトル表示 という．



さらに $\vec{p}=(s,\ t,\ u)$ または $\vec{p}=\begin{pmatrix} s \\ t \\ u \end{pmatrix}$ のように表し，

ベクトル $\vec{p}$ の 成分表示（せいぶんひょうじ） という．

ここで s を $\vec{p}$ の x 成分，t を $\vec{p}$ の y 成分，u を $\vec{p}$ の z 成分 という．

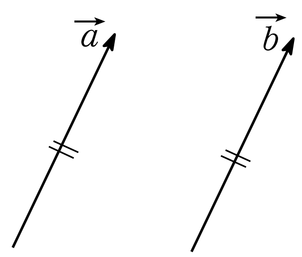
とくに $\vec{0}$，$\vec{e_1}$，$\vec{e_2}$，$\vec{e_3}$ の成分表示は

$$\vec{0}=(0,\ 0,\ 0),\ \vec{e_1}=(1,\ 0,\ 0),\ \vec{e_2}=(0,\ 1,\ 0),\ \vec{e_3}=(0,\ 0,\ 1)$$

成分表示された空間ベクトルの相当

$\vec{a}=(a,\ b,\ c)$，$\vec{b}=(x,\ y,\ z)$ のとき

$$\vec{a}=\vec{b} \iff \begin{cases} a=x \\ b=y \\ c=z \end{cases}$$



成分表示された空間ベクトルの大きさ

$\vec{a}=(a,\, b,\, c)$ のとき

$\vec{a}$ の大きさは $\left|\vec{a}\right|=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$

つまり $\left(\vec{a}\text{ の大きさ}\right)=\sqrt{(x\text{ 成分})^2+(y\text{ 成分})^2+(z\text{ 成分})^2}$

㊎ $\vec{a}=(3,\, 4,\, 5)$ のとき $\left|\vec{a}\right|=\sqrt{3^2+4^2+5^2}=\sqrt{50}=5\sqrt{2}$

成分表示された空間ベクトルの和・差・実数倍

$\boxed{1}$ $\vec{a}=(a,\, b,\, c)$，$\vec{b}=(x,\, y,\, z)$，k は実数 のとき

和：$\vec{a}+\vec{b}=(a,\, b,\, c)+(x,\, y,\, z)=(a+x,\, b+y,\, c+z)$

差：$\vec{a}-\vec{b}=(a,\, b,\, c)-(x,\, y,\, z)=(a-x,\, b-y,\, c-z)$

実数倍：$k\vec{a}=k(a,\, b,\, c)=(ka,\, kb,\, kc)$

$\boxed{2}$ $\vec{a}=\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$，$\vec{b}=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$，$k$ は実数 のとき

和：$\vec{a}+\vec{b}=\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a+x \\ b+y \\ c+z \end{pmatrix}$

差：$\vec{a}-\vec{b}=\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a-x \\ b-y \\ c-z \end{pmatrix}$

実数倍：$k\vec{a}=k\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ka \\ kb \\ kc \end{pmatrix}$

補 $\boxed{1}$ が教科書の書き方である．横のベクトルなので横ベクトル（行ベクトル）という．
$\boxed{2}$ は縦のベクトルなので縦ベクトル（列ベクトル）という．
どちらで計算しても同じことなので，自由に使えばよい．

座標空間のベクトルの成分表示と大きさ（2 点間の距離）

座標空間の 2 点 $\mathrm{A}(a,\ b,\ c)$，$\mathrm{B}(s,\ t,\ u)$ のとき

$\boxed{1}$ $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ の成分表示は $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (s-a,\ t-b,\ u-c)$

$\boxed{2}$ $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ の大きさは $\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right| = \sqrt{(s-a)^2+(t-b)^2+(u-c)^2}$

つまり

$$\left(2\text{ 点 A, B の距離}\right) = \sqrt{(x\text{ 座標の差})^2+(y\text{ 座標の差})^2+(z\text{ 座標の差})^2}$$

考 点 $\mathrm{O}(0,\ 0,\ 0)$ として $\overrightarrow{\mathrm{OA}} = (a,\ b,\ c)$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = (s,\ t,\ u)$

$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}} = (s-a,\ t-b,\ u-c)$

空間ベクトルの展開

x，y，z を実数として

$$\left|x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c}\right|^2$$

$$=x^2\left|\vec{a}\right|^2+y^2\left|\vec{b}\right|^2+z^2\left|\vec{c}\right|^2+2xy\,\vec{a}\cdot\vec{b}+2yz\,\vec{b}\cdot\vec{c}+2zx\,\vec{c}\cdot\vec{a}$$

考　$\left|x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c}\right|^2$

$=(x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c})\cdot(x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c})$

$=x^2\vec{a}\cdot\vec{a}+xy\vec{a}\cdot\vec{b}+xz\vec{a}\cdot\vec{c}+xy\vec{b}\cdot\vec{a}+y^2\vec{b}\cdot\vec{b}+zx\vec{c}\cdot\vec{a}+zy\vec{c}\cdot\vec{b}+z^2\vec{c}\cdot\vec{c}$

$=x^2\left|\vec{a}\right|^2+y^2\left|\vec{b}\right|^2+z^2\left|\vec{c}\right|^2+2xy\,\vec{a}\cdot\vec{b}+2yz\,\vec{b}\cdot\vec{c}+2zx\,\vec{c}\cdot\vec{a}$

成分表示された空間ベクトルの内積

$\vec{a}=(a,\ b,\ c)$，$\vec{b}=(x,\ y,\ z)$ のとき

　内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}=ax+by+cz$

補　平面のときと同様に余弦定理から示せる．

考　$\vec{e_1}=(1,\ 0,\ 0), \vec{e_2}=(0,\ 1,\ 0), \vec{e_3}=(0,\ 0,\ 1)$ とおくと

$\left|\vec{e_1}\right|=\left|\vec{e_2}\right|=\left|\vec{e_3}\right|=1$ ……①

$\vec{e_1}\perp\vec{e_2}$，$\vec{e_2}\perp\vec{e_3}$，$\vec{e_3}\perp\vec{e_1}$ より $\vec{e_1}\cdot\vec{e_2}=\vec{e_2}\cdot\vec{e_3}=\vec{e_3}\cdot\vec{e_1}=0$ ……②

$\vec{a}=(a,\ b,\ c)=a\vec{e_1}+b\vec{e_2}+c\vec{e_3}$

$\vec{b}=(x,\ y,\ z)=x\vec{e_1}+y\vec{e_2}+z\vec{e_3}$

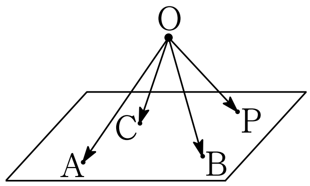
$$\begin{aligned}\vec{a}\cdot\vec{b}&=(a\vec{e_1}+b\vec{e_2}+c\vec{e_3})\cdot(x\vec{e_1}+y\vec{e_2}+z\vec{e_3})\\&=ax\left|\vec{e_1}\right|^2+by\left|\vec{e_2}\right|^2+cz\left|\vec{e_3}\right|^2\\&\quad+ay\vec{e_1}\cdot\vec{e_2}+az\vec{e_1}\cdot\vec{e_3}+bx\vec{e_2}\cdot\vec{e_1}+bz\vec{e_2}\cdot\vec{e_3}+cx\vec{e_3}\cdot\vec{e_1}+cy\vec{e_3}\cdot\vec{e_2}\\&=ax+by+cz\ (\because ①,\ ②)\end{aligned}$$

共面条件

同一直線上にない異なる 3 点 A，B，C があり，

点 O は平面 ABC 上にない点とする．

点 P が平面 ABC 上に存在する条件は次である．



$\boxed{1}$ $\overrightarrow{\mathrm{AP}} = s\,\overrightarrow{\mathrm{AB}} + t\,\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ となる実数 s, t が存在する．

$\boxed{2}$ $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + s\,\overrightarrow{\mathrm{AB}} + t\,\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ となる実数 s, t が存在する．

$\boxed{3}$ $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = (1-s-t)\,\overrightarrow{\mathrm{OA}} + s\,\overrightarrow{\mathrm{AB}} + t\,\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ となる実数 s, t が存在する．

$\boxed{4}$ $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = x\,\overrightarrow{\mathrm{OA}} + y\,\overrightarrow{\mathrm{OB}} + z\,\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ かつ $x+y+z=1$

となる実数 x，y，z が存在する．

考 $\boxed{1}$ $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ で張られる平面上に点 P がある．

$\boxed{2}$ $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{AP}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + s\,\overrightarrow{\mathrm{AB}} + t\,\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ （$\because$ $\boxed{1}$）

$\boxed{3}$ $\boxed{1}$ で始点を O とすると

$\overrightarrow{\mathrm{OP}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}} = s\left(\overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}}\right) + t\left(\overrightarrow{\mathrm{OC}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}}\right)$

すなわち $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = (1-s-t)\,\overrightarrow{\mathrm{OA}} + s\,\overrightarrow{\mathrm{AB}} + t\,\overrightarrow{\mathrm{AC}}$

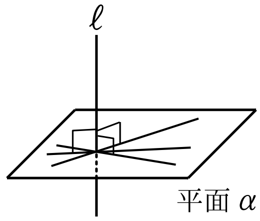
$\boxed{4}$ $\boxed{3}$ で $1-s-t=x$，$s=y$，$t=z$ とおくと $x+y+z=(1-s-t)+s+t=1$

平面と直線が垂直

平面 α と直線 ℓ について

直線 ℓ が平面 α 上のすべての直線に垂直であるとき

ℓ と α は **垂直** であるといい　$\alpha \perp \ell$　とかく.

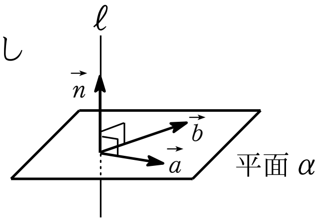


平面と直線が垂直な条件

平面 α 上にある任意の1次独立な2つのベクトルを $\vec{a}$, $\vec{b}$ とし

直線 ℓ の方向ベクトルを $\vec{n}$ とすると

$$\alpha \perp \ell \iff \vec{a} \perp \vec{n} \text{ かつ } \vec{b} \perp \vec{n}$$



考 ($\Longrightarrow$ について)

平面 $\alpha \perp \ell$ ならば，平面 α 上の任意の $\vec{0}$ でないベクトルが $\vec{n}$ に垂直であることから

$\vec{a} \perp \vec{n}$ かつ $\vec{b} \perp \vec{n}$

($\Longleftarrow$ について)

$\vec{a} \perp \vec{n}$ かつ $\vec{b} \perp \vec{n}$ ならば　$\vec{a} \cdot \vec{n} = 0$ かつ $\vec{b} \cdot \vec{n} = 0$　……①

平面 α 上に異なる2点P，Qをとり，さらに1点Oをとると

$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = s\vec{a} + t\vec{b}$

$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = s'\vec{a} + t'\vec{b}$

となる実数 s，t，s'，t' が存在し

$\overrightarrow{\mathrm{PQ}} = \overrightarrow{\mathrm{OQ}} - \overrightarrow{\mathrm{OP}} = (s'-s)\vec{a} + (t'-t)\vec{b}$

と表わせる.

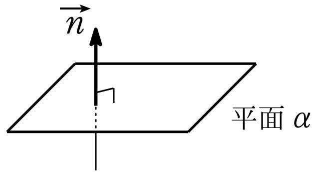
これより　$\overrightarrow{\mathrm{PQ}} \cdot \vec{n} = (s'-s)\vec{a} \cdot \vec{n} + (t'-t)\vec{b} \cdot \vec{n} = 0$　($\because$ ①)

よって　$\overrightarrow{\mathrm{PQ}} \neq \vec{0}$ かつ $\vec{n} \neq \vec{0}$　より　$\overrightarrow{\mathrm{PQ}} \perp \vec{n}$

すなわち　$\alpha \perp \ell$

平面の法線ベクトル

平面 α 上の $\vec{0}$ 以外の任意のベクトルと垂直になる $\vec{n}$ を平面 α の 法線(ほうせん)ベクトル という.



㊟ 平面には法線ベクトルが必ず存在する.

平面の方程式

$(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ とする.

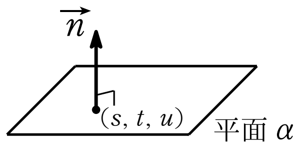
座標空間で点 (s, t, u) を通り，法線ベクトルの 1 つが $\vec{n} = (a, b, c)$

である平面の方程式は

$$a(x-s)+b(y-t)+c(z-u)=0$$

すなわち

$$ax+by+cz+d=0 \quad \text{ただし} \quad d=-as-bt-cz$$



㊹ 点 A(s, t, u)，平面上の点を P(x, y, z) とすると

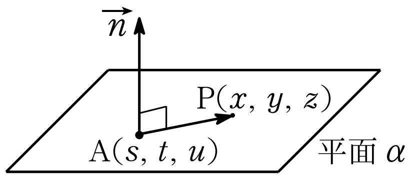
$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = (x-s, y-t, z-u)$

$\vec{n} \perp \overrightarrow{\mathrm{AP}}$ または $\overrightarrow{\mathrm{AP}} = \vec{0}$ であるから $\vec{n} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AP}} = 0$

これより $a(x-s)+b(y-t)+c(z-u)=0$

展開して $ax+by+cz-as-bt-cu=0$

$-as-bt-cu=d$ として $ax+by+cz+d=0$



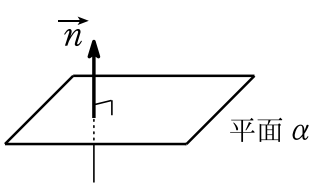
座標空間での平面と法線ベクトル

$(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$，a, b, c, d は定数とする.

座標空間で平面 α の方程式が

$$\alpha : ax+by+cz+d=0$$

ならば $\vec{n} = (a, b, c)$ は α の法線ベクトルの 1 つ.



平面の方程式の一般形

座標空間の平面の方程式の一般形は

$$ax + by + cz + d = 0$$

ただし $a,\ b,\ c,\ d$ は定数，$(a,\ b,\ c) \neq (0,\ 0,\ 0)$

x 切片，y 切片，z 切片がわかる平面の方程式

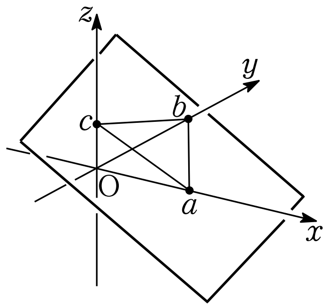
$a \neq 0$，$b \neq 0$，$c \neq 0$ とする．

x 切片が a，y 切片が b，z 切片 c の平面

つまり 3 点 $(a,\ 0,\ 0)$，$(0,\ b,\ 0)$，$(0,\ 0,\ c)$ を通る平面

の方程式は

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$



㊎ 座標空間で 3 点 $(3,\ 0,\ 0)$，$(0,\ 2,\ 0)$，$(0,\ 0,\ 1)$ を通る平面の方程式は

$\frac{x}{3} + \frac{y}{2} + z = 1$ すなわち $2x + 3y + 6z = 6$

点と平面の距離

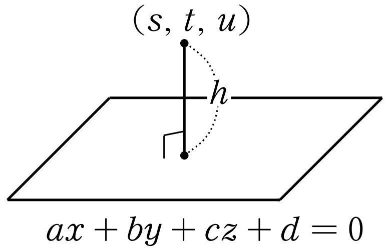
$(a,\ b,\ c) \neq (0,\ 0,\ 0)$，$a,\ b,\ c,\ d$ は定数とする．

座標空間において

点 $(s,\ t,\ u)$ と平面：$ax+by+cz+d=0$

の距離を h とすると

$$h=\frac{|as+bt+cu+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$



㊂ 平面：$ax+by+cz+d=0$ ……①

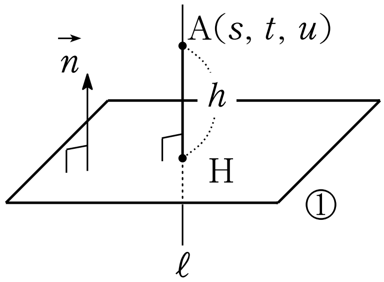
$\mathrm{A}(s,\ t,\ u)$ とおき，点 A を通り ① に垂直な直線を ℓ とし，ℓ と ① の交点を H とする．

$\vec{n}=(a,\ b,\ c)$ とすると $\vec{n}$ は ① の法線ベクトルである．

$\vec{n} /\!/ \overrightarrow{\mathrm{AH}}$ または $\overrightarrow{\mathrm{AH}}=\vec{0}$ より実数 k が存在し

$\overrightarrow{\mathrm{AH}}=k\vec{n}$ ……②

と表せる．



$\mathrm{O}(0,\ 0,\ 0)$ とすると

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OH}}&=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{AH}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+k\vec{n}\\&=(s,\ t,\ u)+k(a,\ b,\ c)\\&=(s+ak,\ t+bk,\ u+ck)\end{aligned}$$

点 H は ① 上にあるので

$$a(s+ak)+b(t+bk)+c(u+ck)+d=0$$

すなわち $(a^2+b^2+c^2)k=-(as+bt+cu+d)$

$a^2+b^2+c^2 \neq 0$ であるから $k=-\dfrac{as+bt+cu+d}{a^2+b^2+c^2}$ ……③

また $|\vec{n}|=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ ……④

② から
$$\begin{aligned}h&=|\overrightarrow{\mathrm{AH}}|=|k||\vec{n}|\\&=\frac{|as+bt+cu+d|}{a^2+b^2+c^2}\cdot\sqrt{a^2+b^2+c^2}\quad(\because ③,\ ④)\\&=\frac{|as+bt+cu+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\end{aligned}$$

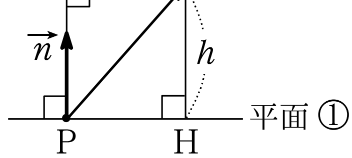
㊊ 平面上に点 $\mathrm{P}(p,\ q,\ r)$ をとると ① 上にあるから $ap+bq+cz+d=0$ ……①′

$\overrightarrow{\mathrm{PA}}=(s-p,\ t-q,\ u-r)$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\vec{n}&=a(s-p)+b(t-q)+c(u-r)=as+bt+cu-(ap+bq+cr)\\&=as+bt+cr+d\quad(\because ①')\end{aligned}$$

$\overrightarrow{\mathrm{PA}}$ の $\vec{n}$ 上への正射影ベクトル $\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\vec{n}}{|\vec{n}|^2}\vec{n}$ の大きさが h なので

$$h=\left|\frac{\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\vec{n}}{|\vec{n}|^2}\vec{n}\right|=\frac{|\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\vec{n}|}{|\vec{n}|}=\frac{|as+bt+cu+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$



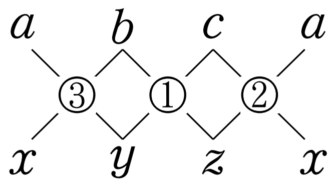
㊟ 点と直線の距離も同じように示せる．

ベクトルの外積

座標空間において

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(a,\ b,\ c)$

$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=(x,\ y,\ z)$



のとき

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\times\overrightarrow{\mathrm{OB}}=(bz\overset{\textcircled{1}}{-}cy,\ cx\overset{\textcircled{2}}{-}az,\ ay\overset{\textcircled{3}}{-}bx)$$

を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ の 外積（がいせき） という．

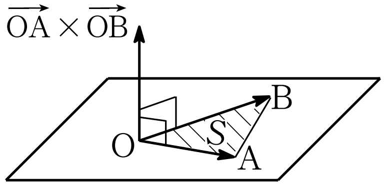
㊫ 内積は実数値だが，外積はベクトルになる．

㊬ 右上図のように $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ の各成分を書き出して，x 成分は 1 列目と 4 列目に書く．
番号の順にたすきにかけて引く（左上 × 右下 − 右上 × 左下）ことで外積の成分が求まる．
① が x 成分，② が y 成分，③ が z 成分になる．

ベクトルの外積の性質

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ は 1 次独立とする.

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ の外積について，次の性質が成り立つ.



$\boxed{1}$ $\overrightarrow{\mathrm{OB}}\times\overrightarrow{\mathrm{OA}}=-\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}}\times\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)$

$\boxed{2}$ $\triangle\mathrm{OAB}$ の面積を S とすると $S=\dfrac{1}{2}\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\times\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|$

$\boxed{3}$ $\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}}\times\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)\perp\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ かつ $\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}}\times\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)\perp\overrightarrow{\mathrm{OB}}$

すなわち $\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}}\times\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)\perp$ 平面 OAB

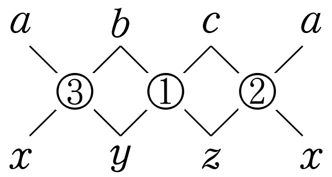
㊟考 $\boxed{1}$ $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(a,\ b,\ c)$

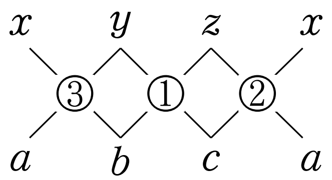
$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=(x,\ y,\ z)$

とすると

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\times\overrightarrow{\mathrm{OB}}=(bz\overset{①}{-}cy,\ cx\overset{②}{-}az,\ ay\overset{③}{-}bx)$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OB}}\times\overrightarrow{\mathrm{OA}}&=(cy\overset{①}{-}bz,\ az\overset{②}{-}cx,\ bx\overset{③}{-}ay)\\&=-(bz-cy,\ cx-az,\ ya-bx)\\&=-\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}}\times\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)\end{aligned}$$





$\boxed{2}$

$$\begin{aligned}S&=\frac{1}{2}\sqrt{\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|^2\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|^2-\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)^2}\\&=\frac{1}{2}\sqrt{(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)-(ax+by+cz)^2}\\&=\frac{1}{2}\sqrt{a^2y^2+a^2z^2+b^2x^2+b^2z^2+c^2x^2+c^2y^2-2abxy-2bcyz-2cazx}\\&=\frac{1}{2}\sqrt{(bz-cy)^2+(cx-az)^2+(ay-bx)^2}\\&=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\times\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|\end{aligned}$$

$\boxed{3}$

$$\begin{aligned}\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}}\times\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}&=a(bz-cy)+b(cx-az)+c(ay-bx)\\&=abz-acy+bcx-abz+acy-bcx\\&=0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}}\times\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}&=x(bz-cy)+y(cx-az)+z(ay-bx)\\&=bxz-cxy+cxy-ayz+ayz-bxz\\&=0\end{aligned}$$

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\neq\vec{0}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\neq\vec{0}$，$S>0$ であるから $\boxed{2}$ より $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\times\overrightarrow{\mathrm{OB}}\neq\vec{0}$

よって $\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}}\times\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)\perp\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ かつ $\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}}\times\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)\perp\overrightarrow{\mathrm{OB}}$

補 $\boxed{2}$ において，$c=0,\ z=0$ とする．つまり

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(a,\ b,\ 0)$

$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=(x,\ y,\ 0)$

とすると $S=\dfrac{1}{2}\sqrt{(ay-bx)^2}=\dfrac{1}{2}\left|ay-bx\right|$

これは平面での三角形の面積公式.

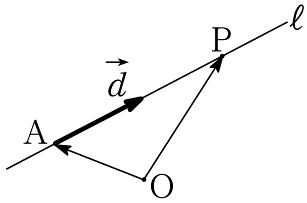
直線のベクトル方程式

座標空間において

点 $\mathrm{A}(a,\ b,\ c)$ を通り，方向ベクトルが $\vec{d}=(p,\ q,\ r)$ の直線を ℓ とする．

ℓ 上の点を $\mathrm{P}(x,\ y,\ z)$ とすると，t を実数として

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\vec{d} \quad \text{すなわち} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}+t\begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}$$



$\boxed{1}$ $p \neq 0,\ q \neq 0,\ r \neq 0$ のとき

$$\ell : \frac{x-a}{p}=\frac{y-b}{q}=\frac{z-c}{r}$$

$\boxed{2}$ $p \neq 0,\ q \neq 0,\ r=0$ のとき

点 $\mathrm{A}(a,\ b,\ c)$ を通り，方向ベクトルが $\vec{d}=(p,\ q,\ 0)$ の直線で

$$\ell : \frac{x-a}{p}=\frac{y-b}{q},\ z=c$$ （xy 平面に平行な直線）

$\boxed{3}$ $p \neq 0,\ q=0,\ r \neq 0$ のとき

点 $\mathrm{A}(a,\ b,\ c)$ を通り，方向ベクトルが $\vec{d}=(p,\ 0,\ r)$ の直線で

$$\ell : \frac{x-a}{p}=\frac{z-c}{r},\ y=b$$ （zx 平面に平行な直線）

$\boxed{4}$ $p=0,\ q \neq 0,\ r \neq 0$ のとき

点 $\mathrm{A}(a,\ b,\ c)$ を通り，方向ベクトルが $\vec{d}=(0,\ q,\ r)$ の直線で

$$\ell : \frac{y-b}{q}=\frac{z-c}{r},\ x=a$$ （yz 平面に平行な直線）

$\boxed{5}$ $p \neq 0,\ q=0,\ r=0$ のとき

点 $\mathrm{A}(a,\ b,\ c)$ を通り，方向ベクトルが $\vec{d}=(p,\ 0,\ 0)$ の直線で

$\ell : y=b,\ z=c$ （x 軸に平行な直線）

$\boxed{6}$ $p=0,\ q \neq 0,\ r=0$ のとき

点 $\mathrm{A}(a,\ b,\ c)$ を通り，方向ベクトルが $\vec{d}=(0,\ q,\ 0)$ の直線で

$\ell : x=a,\ z=c$ （y 軸に平行な直線）

$\boxed{7}$ $p=0,\ q=0,\ r \neq 0$ のとき

点 $\mathrm{A}(a,\ b,\ c)$ を通り，方向ベクトルが $\vec{d}=(0,\ 0,\ r)$ の直線で

$\ell : x=a,\ y=b$ （z 軸に平行な直線）

考 t を消去した方程式

球面の方程式

中心が点 $(a,\ b,\ c)$，半径 r の球面の方程式は

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$$

ベクトルでの３次元のコーシー・シュワルツの不等式

$\vec{p}=(a,\ b,\ c),\ \vec{q}=(x,\ y,\ z)$ のとき

$$\left(\vec{p}\cdot\vec{q}\right)^2 \leqq \left|\vec{p}\right|^2\left|\vec{q}\right|^2$$

つまり

$$(ax+by+cz)^2 \leqq (a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)$$

等号が成り立つのは $\vec{p}=\vec{0}$ または $\vec{q}=\vec{0}$ または $\vec{p}\parallel\vec{q}$

すなわち $(a,\ b,\ c)=(0,\ 0,\ 0)$ または $(x,\ y,\ z)=(0,\ 0,\ 0)$

または $a:b:c=x:y:z$