数学Ⅲ　関数

～高校数学のまとめ～

教科書をもとに定義や定理を独自にパネル形式でまとめています．
何度も書き直し，加筆修正を繰り返しており，完成したものではありません．
人によっては不要な部分もあるでしょう．そういうときは読み飛ばしてください．

関数

2 つの変数 x，y があって

x の 値(あたい) を定めると それに応じて y の 値(あたい) がただ 1 つだけ定まることを

y は x の **関数**(かんすう) という.

例 $y=2x$ の関係は $x=1$ とすると $y=2$ と y の値がただ 1 つだけ定まる.
x の値を定めると y の値が 1 つだけ定まるので「y は x の関数」である.

注 $y^2=x$ の関係は $x=1$ とすると $y^2=1$ であるから $y=\pm1$
これは y の値が 2 つ決まり，y がただ 1 つ決まらないので「y は x の関数」ではない.

定義域と値域

y が x の関数であるとき

$\boxed{1}$ 変数 x のとりうる値の範囲を

定義域(ていぎいき) または x の**変域**(へんいき) という.

$\boxed{2}$ x が定義域全体を動くとき変数 y がとる値の範囲を

値域(ちいき) または y の**変域**(へんいき) という.

例 関数 $y=2x$ $(0 \leqq x \leqq 1)$ について
$\boxed{1}$ 定義域は $0 \leqq x \leqq 1$
$\boxed{2}$ 定義域 $0 \leqq x \leqq 1$ 全体を x が動くときの y のとる値の範囲は $0 \leqq y \leqq 2$
値域は $0 \leqq y \leqq 2$

関数の表記

y が x の関数であることを $y=f(x)$ と表す.

関数 $y=f(x)$ において，x の値 a に対応して定まる y の値を $f(a)$ で表し

$x=a$ のときの 関数 $f(x)$ の 値(あたい) という.

話 「関数」という言葉を導入したのはライプニッツ (1646−1716) で，
その弟子のヨハン・ベルヌーイ (1667−1748) が関数の考え方を整理し，
さらにその弟子のオイラー (1707−1783) が 1734 年に $f(x)$ という形を最初に用いた.
関数の性質を研究する数学の分野を解析学という.

分数関数

分数式で表された関数で分母に変数があるような関数を **分数関数**（ぶんすうかんすう） という.

㊟例 $y=\dfrac{1}{x}$, $y=\dfrac{2x+1}{x+2}$, $y=\dfrac{2x}{x^2+1}$

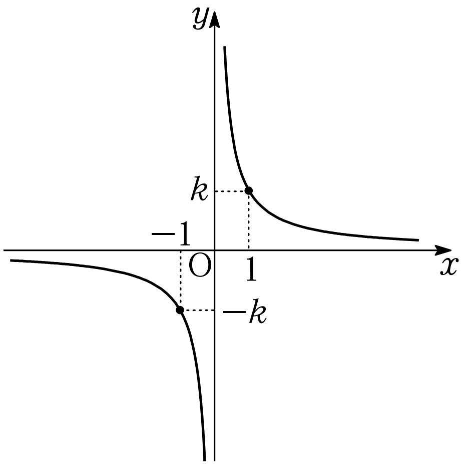
分数関数 $y=\dfrac{k}{x}$ のグラフ

座標平面で

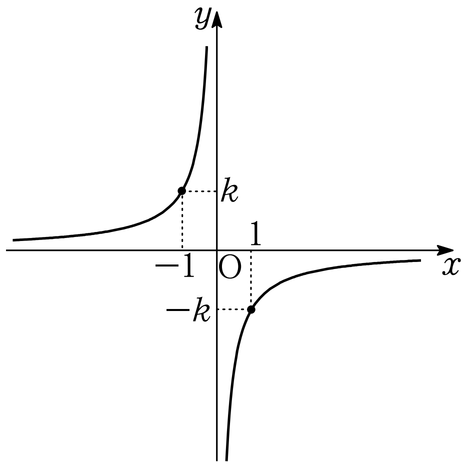
分数関数 $y=\dfrac{k}{x}$ $(k \neq 0)$

のグラフは**直角双曲線**（ちょっかくそうきょくせん）であり，次のような概形となる.

〔$k>0$ のとき〕



〔$k<0$ のとき〕



このグラフについて

$\boxed{1}$ 定義域は $x \neq 0$，値域は $y \neq 0$

$\boxed{2}$ 漸近線は直交する 2 本の直線 $x=0$ (y 軸)，$y=0$ (x 軸)

$\boxed{3}$ 中心は $(0, 0)$

$\boxed{4}$ グラフ は $\begin{cases} k>0 \text{ のとき　第1, 3象限にある} \\ k<0 \text{ のとき　第2, 4象限にある} \end{cases}$

㊟補 「反比例のグラフ」という人がいる.

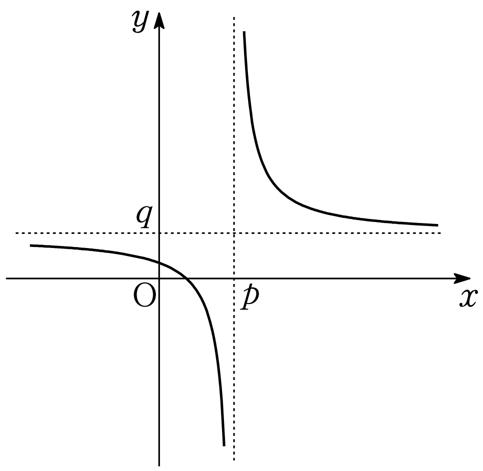
一般形の分数関数のグラフ

座標平面で

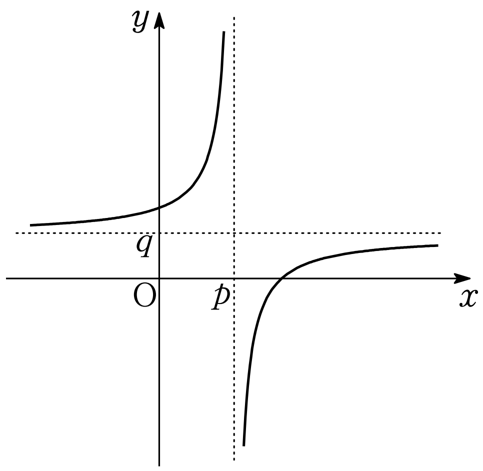
分数関数 $y=\dfrac{k}{x-p}+q\ (k \neq 0)$

のグラフは**直角双曲線**であり，次のような概形となる．

〔$k>0$ のとき〕



〔$k<0$ のとき〕



このグラフについて

1. 定義域は $x \neq p$，値域は $y \neq q$
2. 漸近線は直交する 2 本の直線 $x=p$，$y=q$
3. 中心は $(p,\ q)$
4. $y=\dfrac{k}{x}\ (k \neq 0)$ のグラフを
   x 軸方向に p，y 軸方向に q だけ平行移動したグラフ

分数関数の変形

$ad-bc \neq 0$，$c \neq 0$ ならば

$y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ は $y=\dfrac{k}{x-p}+q$ の形に変形できる．

例 $y=\dfrac{2x-5}{x-3}=\dfrac{2(x-3)+1}{x-3}=\dfrac{1}{x-3}+2$ を分数関数という．

無理式と無理関数

根号の中に文字を含む式を **無理式**（むりしき）といい，

無理式で表される関数を **無理関数**（むりかんすう）という．

㊎ $y=\sqrt{x}$，$y=\sqrt{2x+1}$，$y=\sqrt{x^2+x+1}$ を無理関数という．

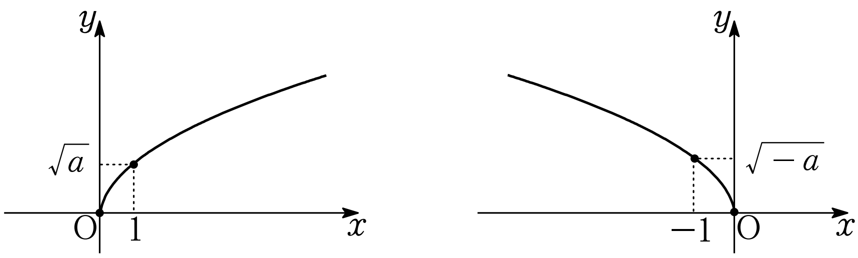
無理関数 $y=\sqrt{ax}$ のグラフ

座標平面で

無理関数 $y=\sqrt{ax}$ $(a \neq 0)$

のグラフは **放物線の一部**（ほうぶつせん）であり，次のような概形となる．

〔$a>0$ のとき〕　　〔$a<0$ のとき〕



このグラフについて

$\boxed{1}$ 定義域は $\begin{cases} x \geqq 0 & (a>0) \\ x \leqq 0 & (a<0) \end{cases}$

$\boxed{2}$ 値域は $y \geqq 0$

$\boxed{3}$ 頂点は $(0,\ 0)$

$\boxed{4}$ グラフ は $\begin{cases} \text{単調増加} & (a>0) \\ \text{単調減少} & (a<0) \end{cases}$

㊓ $y=\sqrt{ax}$ は $y \geqq 0$，$ax \geqq 0$ のもとで両辺 2 乗して $y^2=ax$

これは放物線の一部

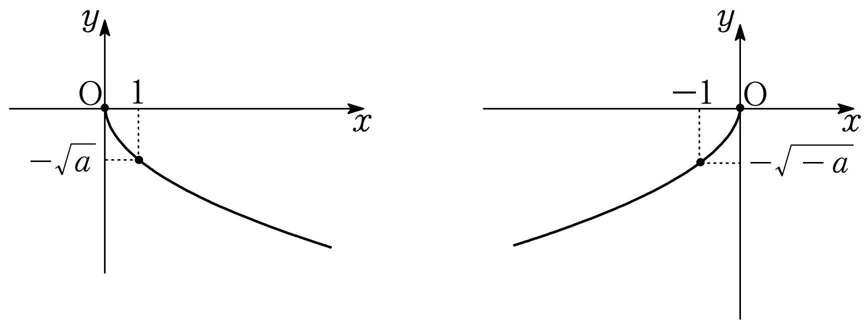
無理関数 $y=-\sqrt{ax}$ のグラフ

座標平面で

無理関数 $y=-\sqrt{ax}$ $(a \neq 0)$

のグラフは 放物線(ほうぶつせん)の一部 であり，次のような概形となる.

〔$a>0$ のとき〕 〔$a<0$ のとき〕



このグラフについて

$\boxed{1}$ 定義域は $\begin{cases} x \geqq 0 & (a>0) \\ x \leqq 0 & (a<0) \end{cases}$

$\boxed{2}$ 値域は $y \leqq 0$

$\boxed{3}$ 頂点は $(0,\ 0)$

$\boxed{4}$ グラフ は $\begin{cases} \text{単調減少} & (a>0) \\ \text{単調増加} & (a<0) \end{cases}$

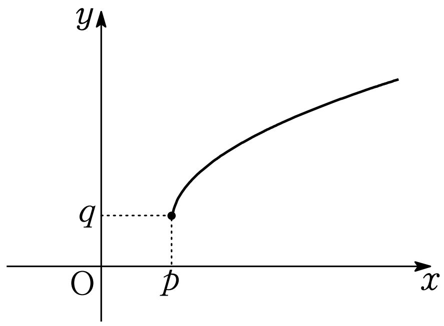
一般形の無理関数のグラフ

座標平面で

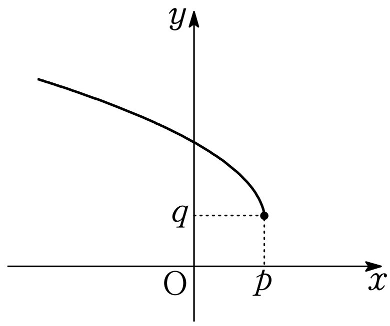
無理関数 $y=\sqrt{a(x-p)}+q\ (a \neq 0)$

のグラフは **放物線**（ほうぶつせん）**の一部** であり，次のような概形となる．

〔$a>0$ のとき〕



〔$a<0$ のとき〕



このグラフについて

$\boxed{1}$ 定義域は $\begin{cases} x \geqq p & (a>0) \\ x \leqq p & (a<0) \end{cases}$

$\boxed{2}$ 値域は $y \geqq q$

$\boxed{3}$ 頂点は $(p,\ q)$

$\boxed{4}$ グラフ は $\begin{cases} \text{単調増加} & (a>0) \\ \text{単調減少} & (a<0) \end{cases}$

$\boxed{5}$ $y=\sqrt{ax}\ \ (a \neq 0)$ のグラフを

x 軸方向に p，y 軸方向に q だけ平行移動したグラフ

逆関数

関数 $y=f(x)$ の値域に含まれる任意の値に対して，
対応する x がただ1つ定まるとき
y の関数 $x=g(y)$ が決まり，関数 $y=f(x)$ の 逆関数（ぎゃくかんすう）という.
x と y を入れかえて $y=g(x)$ と書き $y=f^{-1}(x)$ と表す.

逆関数の求め方

関数 $y=f(x)$ の逆関数 は次の手順で求めることができる.

1. 関係式 $y=f(x)$ を変形して $x=g(y)$ の形にする.
   (値域のすべての y の値に対して，x がただ1つ定まる形にする)
2. x と y を入れかえて $y=g(x)$ とする.

この $g(x)$ が逆関数であり $f^{-1}(x)$ とも表せる.

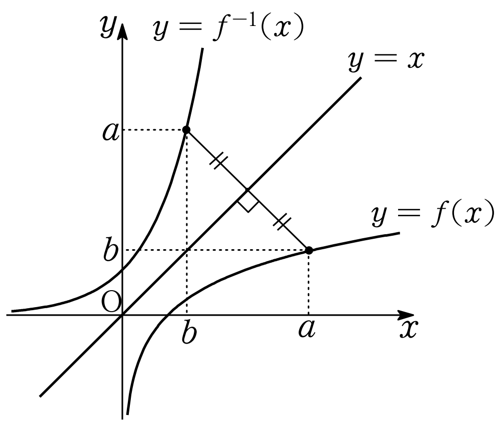
例 $y=2^x$ の逆関数を求める.
1. $x=\log_2 y\ (y>0)$
2. x と y を入れかえて $y=\log_2 x\ (x>0)$

逆関数は $y=\log_2 x\ (x>0)$

逆関数の性質

関数 $y=f(x)$ と 逆関数 $y=f^{-1}(x)$ について，次のことが成り立つ.

1. $b=f(a) \iff a=f^{-1}(b)$
2. $f(x)$ と $f^{-1}(x)$ とでは
   定義域と値域が入れかわる
3. $y=f(x)$ と $y=f^{-1}(x)$
   の2つのグラフは
   直線 $y=x$ に関して対称



合成関数

2つの関数 $\begin{cases} u = f(x) \\ y = g(u) \end{cases}$

について

関数 $f(x)$ の値域が関数 $g(u)$ の定義域に含まれているとき

x の関数 $y = g\big(f(x)\big)$ が決まる．

これを $f(x)$ と $g(u)$ の 合成関数（ごうせいかんすう） といい $(g \circ f)(x)$ と表す．

すなわち $(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big)$

㋐例 $\begin{cases} f(x) = \log_3(x+1) \\ g(x) = \sqrt{x-1} \end{cases}$ のとき $(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big) = \sqrt{\log_3(x+1) - 1}$

補 合成関数の定義域は形に合わせて修正する．上の 例 で考えてみると

$f(x)$ の定義域は 真数条件から $x + 1 > 0$ すなわち $\boldsymbol{x > -1}$

$g(x) =$ の定義域は 根号内が 0 以上より $x - 1 \geqq 0$ すなわち $\boldsymbol{x \geqq 1}$

合成関数 $g\big(f(x)\big)$ の定義域は 根号内が 0 以上より $\log_3(x+1) - 1 \geqq 0$

$\log_3(x+1) \geqq \log_3 3$ なので $x + 1 \geqq 3$ すなわち $\boldsymbol{x \geqq 2}$

合成関数と逆関数

関数 $f(x)$ の逆関数 $f^{-1}(x)$ が存在するとき，次が成り立つ．

$\boxed{1}$ $(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}\big(f(x)\big) = x$

$\boxed{2}$ $(f \circ f^{-1})(x) = f\big(f^{-1}(x)\big) = x$

例 $f(x) = 2^x$ の逆関数は $f^{-1}(x) = \log_2 x$

$\boxed{1}$ $(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}\big(f(x)\big) = \log_2 f(x) = \log_2 2^x = x$

$\boxed{2}$ $(f \circ f^{-1})(x) = f\big(f^{-1}(x)\big) = 2^{f^{-1}(x)} = 2^{\log_2 x} = x$