数学 II　積分法

～高校数学のまとめ～

教科書をもとに定義や定理を独自にパネル形式でまとめています．
何度も書き直し，加筆修正を繰り返しており，完成したものではありません．
人によっては不要な部分もあるでしょう．そういうときは読み飛ばしてください．

原始関数

関数 $f(x)$ が与えられたとき，微分して $f(x)$ になる関数 $F(x)$

すなわち $F'(x)=f(x)$ を満たす関数 $F(x)$ を $f(x)$ の **原始関数**（げんしかんすう）という．

㊑ $(x^2)'=2x$ を満たすので $2x$ の原始関数の 1 つは x^2

不定積分

関数 $f(x)$ の原始関数の 1 つを $F(x)$ とする．つまり $F'(x)=f(x)$

このとき，C を定数として

$$\int f(x)\,dx = F(x)+C$$

と表せて

$\int f(x)\,dx$ を $f(x)$ の **不定積分**（ふていせきぶん）という．

C を **積分定数**（せきぶんていすう）という．

㊓ 記号 $\int$ は「インテグラル」または「積分」と読む．

㊑ $\int 2x\,dx = x^2+C$（C は積分定数）

積分する

x の関数 $f(x)$ の不定積分 $\int f(x)\,dx$ を求めることを

$f(x)$ を x で **積分する**（せきぶん）という．

x^n の積分

n が 0 以上の整数，C を積分定数として

$$\int x^n\,dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C$$

とくに

$$\int 1\,dx = x + C$$

$$\int x\,dx = \frac{1}{2}x^2 + C$$

$$\int x^2\,dx = \frac{1}{3}x^3 + C$$

$$\int x^3\,dx = \frac{1}{4}x^4 + C$$

$(x+\alpha)^n$ の積分

n が正の整数，α が定数，C を積分定数として

$$\int (x+\alpha)^n\,dx = \frac{1}{n+1}(x+\alpha)^{n+1} + C$$

とくに

$$\int (x+\alpha)\,dx = \frac{1}{2}(x+\alpha)^2 + C$$

$$\int (x+\alpha)^2\,dx = \frac{1}{3}(x+\alpha)^3 + C$$

$$\int (x+\alpha)^3\,dx = \frac{1}{4}(x+\alpha)^4 + C$$

例 $\int (x+1)^2\,dx = \frac{1}{3}(x+1)^3 + C$

和・差・実数倍の不定積分

1 $\displaystyle\int \{f(x)+g(x)\}\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$

2 $\displaystyle\int \{f(x)-g(x)\}\,dx = \int f(x)\,dx - \int g(x)\,dx$

3 k を実数とするとき $\displaystyle\int k\,f(x)\,dx = k\int f(x)\,dx$

1，2，3 をまとめて，関数 $f(x)$，$g(x)$ と実数 s，t に対して

$$\int \{s\,f(x) + t\,g(x)\}\,dx = s\int f(x)\,dx + t\int g(x)\,dx$$

定積分

関数 $f(x)$ の原始関数の 1 つを $F(x)$ とする．つまり $F'(x)=f(x)$

このとき，2 つの実数 a, b に対して 差 $F(b)-F(a)$ を

関数 $f(x)$ の a から b までの 定積分（ていせきぶん）といい $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ で表す．

a をこの定積分の下端（かたん），b を上端（じょうたん）という．

定積分を求めることを $f(x)$ を a から b まで積分するという．

また $F(b)-F(a)$ を記号 $\Big[\,F(x)\,\Big]_a^b$ で表わす．

補 $f(x)$ は負の値をとってもよい．

補 定積分の下端，上端の大小について $a<b$，$a=b$，$a>b$ のいずれであってもよい．

定積分の表記

$F'(x)=f(x)$ として

$$\int_a^b f(x)\,dx=\Big[\,F(x)\,\Big]_a^b=F(b)-F(a)$$

例 $\displaystyle\int_1^2 2x\,dx=\Big[\,x^2\,\Big]_1^2=2^2-1^2=3$

和・差・実数倍の定積分

$\boxed{1}$ $$\int_a^b\big\{f(x)+g(x)\big\}\,dx=\int_a^b f(x)\,dx+\int_a^b g(x)\,dx$$

$\boxed{2}$ $$\int_a^b\big\{f(x)-g(x)\big\}\,dx=\int_a^b f(x)\,dx-\int_a^b g(x)\,dx$$

$\boxed{3}$ k を実数とするとき $\displaystyle\int_a^b k\,f(x)\,dx=k\int_a^b f(x)\,dx$

$\boxed{1}$，$\boxed{2}$，$\boxed{3}$ をまとめて，関数 $f(x)$，$g(x)$ と実数 s，t に対して

$$\int_a^b\big\{s\,f(x)+t\,g(x)\big\}\,dx=s\int_a^b f(x)\,dx+t\int_a^b g(x)\,dx$$

例 $\displaystyle\int_1^2 3x^2+5x\,dx=3\int_1^2 x^2\,dx+5\int_1^2 x\,dx$

定積分の性質

1　$\displaystyle\int_a^a f(x)\,dx = 0$

2　$\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$

3　$\displaystyle\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$

考 $F'(x) = f(x)$ とする．

1 $\displaystyle\int_a^a f(x)\,dx = \Big[\,F(x)\,\Big]_a^a = F(a) - F(a) = 0$

2 $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \Big[\,F(x)\,\Big]_a^b = F(b) - F(a) = -\{F(a) - F(b)\} = -\Big[\,F(x)\,\Big]_b^a$

$\displaystyle= -\int_b^a f(x)\,dx$

3 $\displaystyle\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \Big[\,F(x)\,\Big]_c^a + \Big[\,F(x)\,\Big]_c^b = F(c) - F(a) + F(b) - F(c)$

$\displaystyle= F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,dx$

定積分の基本性質

定積分は変数の取り方に関係なく同じ値になる．

すなわち

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt$$

例 $\displaystyle\int_1^2 x^2\,dx = \int_1^2 t^2\,dt$

定積分の値

a，b を x によらない定数とする．

定積分 $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ の値 は x に無関係な定数である．

例 $\displaystyle\int_1^2 x^2\,dx = \Big[\,\frac{x^3}{3}\,\Big]_1^2 = \frac{1}{3}(2^3 - 1^3) = \frac{7}{3}$

微積分学の基本定理

a は定数，$f(x)$ が連続関数のとき $\displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$ を x で微分すると $f(x)$

すなわち

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x)$$

㊂ $F'(x) = f(x)$ とすると

$$\int_a^x f(t)\,dt = \Big[\,F(t)\,\Big]_a^x = F(x) - F(a)$$

ここで $F(a)$ は定数

よって，x で微分すると $f(x)$

㊀ $\displaystyle\int_1^x t^2\,dt$ を x で微分すると x^2

すなわち $\displaystyle\frac{d}{dx}\int_1^x t^2\,dt = x^2$

偶関数・奇関数の定積分

$\boxed{1}$ $f(x)$ が偶関数のとき $\displaystyle\int_{-a}^a f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$

$\boxed{2}$ $g(x)$ が奇関数のとき $\displaystyle\int_{-a}^a g(x)\,dx = 0$

とくに m を 0 以上の整数として，次が成り立つ．

$\boxed{1}$ $\displaystyle\int_{-a}^a x^{2m}\,dx = 2\int_0^a x^{2m}\,dx$

$\boxed{2}$ $\displaystyle\int_{-a}^a x^{2m+1}\,dx = 0$

㊀ $\boxed{1}$ $\displaystyle\int_{-1}^1 x^2\,dx = 2\int_0^1 x^2\,dx$

$\boxed{2}$ $\displaystyle\int_{-1}^1 x^3\,dx = 0$

積分公式（6分の1公式）

$$\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)\,dx = -\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$$

考（$x-\alpha$ の形をつくることを考える）

$$\begin{aligned}\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)\,dx &= \int_\alpha^\beta (x-\alpha)\{(x-\alpha)-(\beta-\alpha)\}\,dx\\ &= \int_\alpha^\beta \{(x-\alpha)^2-(\beta-\alpha)(x-\alpha)\}\,dx\\ &= \left[\frac{1}{3}(x-\alpha)^3-\frac{1}{2}(\beta-\alpha)(x-\alpha)^2\right]_\alpha^\beta\\ &= \frac{1}{3}(\beta-\alpha)^3-\frac{1}{2}(\beta-\alpha)^3\\ &= -\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3\end{aligned}$$

別（展開して積分して因数分解する）

$$\begin{aligned}\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)\,dx &= \int_\alpha^\beta \{x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta\}\,dx\\ &= \left[\frac{x^3}{3}-\frac{\alpha+\beta}{2}x^2+\alpha\beta x\right]_\alpha^\beta\\ &= \frac{1}{3}(\beta^3-\alpha^3)-\frac{\alpha+\beta}{2}(\beta^2-\alpha^2)+\alpha\beta(\beta-\alpha)\\ &= \frac{1}{3}(\beta-\alpha)(\beta^2+\alpha\beta+\alpha^2)-\frac{1}{2}(\beta-\alpha)(\alpha+\beta)^2+\alpha\beta(\beta-\alpha)\\ &= \frac{1}{6}(\beta-\alpha)\{2(\beta^2+\alpha\beta+\alpha^2)-3(\alpha+\beta)^2+6\alpha\beta\}\\ &= \frac{1}{6}(\beta-\alpha)(-\alpha^2-\beta^2+2\alpha\beta)\\ &= -\frac{1}{6}(\beta-\alpha)(\beta^2-2\alpha\beta+\alpha^2)\\ &= -\frac{1}{6}(\beta-\alpha)(\beta-\alpha)^2\\ &= -\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3\end{aligned}$$

例 $$\begin{aligned}\int_1^2 (x-1)(x-2)\,dx &= -\frac{1}{6}(2-1)^3\\ &= -\frac{1}{6}\end{aligned}$$

例 $$\begin{aligned}\int_{1-\sqrt{2}}^{1+\sqrt{2}} (x^2-2x-1)\,dx &= \int_{1-\sqrt{2}}^{1+\sqrt{2}} \{x-(1-\sqrt{2})\}\{x-(1+\sqrt{2})\}\,dx\\ &= -\frac{1}{6}\{1+\sqrt{2}-(1-\sqrt{2})\}^3\\ &= -\frac{1}{6}(2\sqrt{2})^3\\ &= -\frac{8}{3}\sqrt{2}\end{aligned}$$

積分公式（12 分の 1 公式）

$\boxed{1}$ $$\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)^2(x-\beta)\,dx=-\frac{1}{12}(\beta-\alpha)^4$$

$\boxed{2}$ $$\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)(x-\beta)^2\,dx=\frac{1}{12}(\beta-\alpha)^4$$

考 $\boxed{1}$
$$\begin{aligned}\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)^2(x-\beta)\,dx&=\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)^2\{(x-\alpha)-(\beta-\alpha)\}\,dx\\&=\int_{\alpha}^{\beta}\{(x-\alpha)^3-(\beta-\alpha)(x-\alpha)^2\}\,dx\\&=\left[\frac{1}{4}(x-\alpha)^4-\frac{1}{3}(\beta-\alpha)(x-\alpha)^3\right]_{\alpha}^{\beta}\\&=\frac{(\beta-\alpha)^4}{4}-\frac{(\beta-\alpha)^4}{3}\\&=-\frac{1}{12}(\beta-\alpha)^4\end{aligned}$$

$\boxed{2}$ $\boxed{1}$ の α と β を入れ替えて

$$\int_{\beta}^{\alpha}(x-\beta)^2(x-\alpha)\,dx=-\frac{1}{12}(\alpha-\beta)^4$$

すなわち $\displaystyle\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)(x-\beta)^2\,dx=\frac{1}{12}(\beta-\alpha)^4$

考 $\boxed{1}$ $\displaystyle\int_{2}^{3}(x-2)^2(x-3)\,dx=-\frac{1}{12}(3-2)^4=-\frac{1}{12}$

$\boxed{2}$ $\displaystyle\int_{2}^{3}(x-2)(x-3)^2\,dx=\frac{1}{12}(3-2)^4=\frac{1}{12}$

積分公式（30 分の 1 公式）

$$\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)^2(x-\beta)^2\,dx=\frac{1}{30}(\beta-\alpha)^5$$

考 $\displaystyle\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)^2\underset{\sim\sim\sim}{(x-\beta)^2}\,dx$

$$\begin{aligned}
&=\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)^2\{(x-\alpha)-(\beta-\alpha)\}^2\,dx\\
&=\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)^2\{(x-\alpha)^2-2(\beta-\alpha)(x-\alpha)+(\beta-\alpha)^2\}\,dx\\
&=\int_{\alpha}^{\beta}\{(x-\alpha)^4-2(\beta-\alpha)(x-\alpha)^3+(\beta-\alpha)^2(x-\alpha)^2\}\,dx\\
&=\Big[\ \frac{1}{5}(x-\alpha)^5-\frac{1}{2}(\beta-\alpha)(x-\alpha)^4+\frac{1}{3}(\beta-\alpha)^2(x-\alpha)^3\ \Big]_{\alpha}^{\beta}\\
&=\frac{(\beta-\alpha)^5}{5}-\frac{(\beta-\alpha)^5}{2}+\frac{1}{3}(\beta-\alpha)^5\\
&=\Big(\frac{1}{5}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\Big)(\beta-\alpha)^5\\
&=\frac{1}{30}(\beta-\alpha)^5
\end{aligned}$$

例 $\displaystyle\int_{2}^{3}(x-2)^2(x-3)^2\,dx=\frac{1}{30}(3-2)^5=\frac{1}{30}$

定積分と面積１

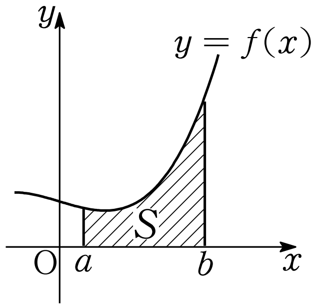
座標平面において，区間 $a \leqq x \leqq b$ で $f(x) \geqq 0$ とする．

曲線 $y = f(x)$ と $y = 0$（x 軸）

および２直線 $x = a, x = b$ で囲まれた図形の面積を

S とすると

$$S = \int_a^b y\,dx \quad \text{または} \quad S = \int_a^b f(x)\,dx$$



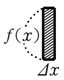
考 厳密な証明は数学 III

話 大雑把な説明を書いておく．

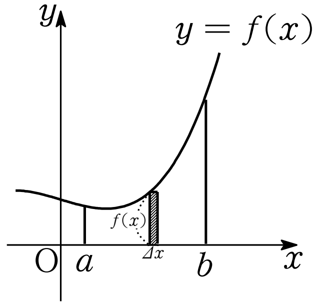
$\int \fallingdotseq S \fallingdotseq \sum$ は「Sum(足し合わせる)」を意味する．

微小面積を $\varDelta S$ とすると

微小な世界では曲がった線も直線にみなせるので長方形の面積より

$\varDelta S =$  $= f(x) \cdot \varDelta x$

$\varDelta S$ を a から b まで求積して（足し合わせて）面積は求まる．



定積分と面積２

座標平面において，区間 $a \leqq x \leqq b$ で $f(x) \leqq 0$ とする．

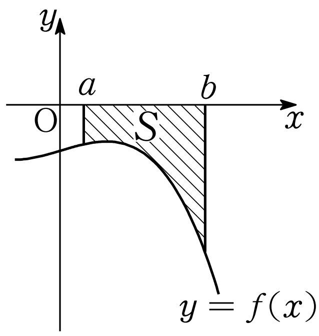
曲線 $y = f(x)$ と $y = 0$（x 軸）および２直線 $x = a,\ x = b$ で

囲まれた図形の面積を S とすると

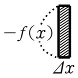
$$S = \int_a^b (-y)\,dx = -\int_a^b y\,dx$$

または

$$S = \int_a^b f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$$



考 微小面積 $\varDelta S$ は底辺 $\varDelta x$，高さ $-f(x)$ の長方形なので

$\varDelta S =$  $= -f(x) \cdot \varDelta x$

$\varDelta S$ を a から b まで求積して（足し合わせて）面積は求まる．

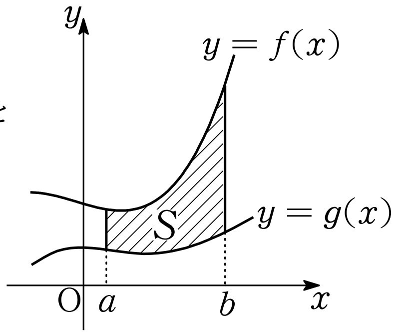
定積分と面積3

座標平面において，区間 $a \leqq x \leqq b$ で $f(x) \geqq g(x)$ とする．

曲線 $y=f(x)$ と $y=g(x)$

および 2 直線 $x=a$, $x=b$ で囲まれた図形の面積を

S とすると

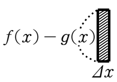


$$S=\int_a^b \{f(x)-g(x)\}\,dx$$

つまり（面積）$=\displaystyle\int_a^b$ {（上の関数）−（下の関数）} dx

㊋ x 軸は関数 $y=0$ なので，定積分と面積1，定積分と面積2の面積も立式できる．

㋕ 微小面積 $\varDelta S$ は底辺 $\varDelta x$，高さ $f(x)-g(x)$ の長方形なので

$\varDelta S=$  $=\{f(x)-g(x)\}\cdot\varDelta x$

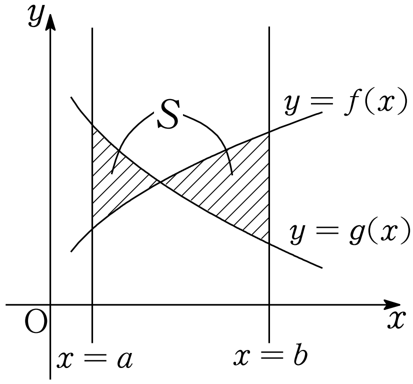
$\varDelta S$ を a から b まで求積して（足し合わせて）面積は求まる．

定積分と面積 4

$a<b$ とする．座標平面において，

曲線 $y=f(x)$ と $y=g(x)$ および 2 直線 $x=a,\ x=b$ で

囲まれた図形の面積を S とすると



$$S=\int_a^b \left|f(x)-g(x)\right| dx$$

つまり（面積）$=\displaystyle\int_a^b$（関数の差の絶対値）dx

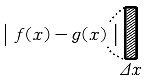
とくに $a \leqq x \leqq b$ において

$f(x)$ と $g(x)$ の大小関係が変わらないとき

$$S=\int_a^b \left|f(x)-g(x)\right| dx=\left|\int_a^b \{f(x)-g(x)\}\, dx\right|$$

㊓ 面積は区間分けせず，1 つの式で表せる．

㊔ 微小面積 $\varDelta S$ は底辺 $\varDelta x$，高さ $\left|f(x)-g(x)\right|$ の長方形なので

$\varDelta S=$ 

$=\left|f(x)-g(x)\right|\cdot\varDelta x$

$\varDelta S$ を a から b まで求積して（足し合わせて）面積は求まる．

㊓ $a \leqq x \leqq b$ において，$f(x)$ と $g(x)$ の大小関係が変わらない」とは

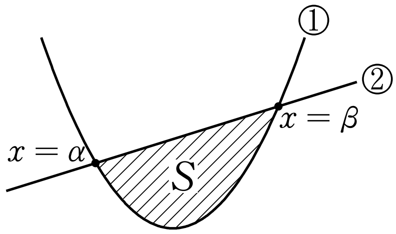
「$a \leqq x \leqq b$ で常に $f(x) \geqq g(x)$」または「$a \leqq x \leqq b$ で常に $f(x) \leqq g(x)$」のこと．

この場合，絶対値記号を外に出せるので，面積公式をたくさん作ることができる．

放物線と直線で囲まれる図形の面積

座標平面において，放物線と直線

$$\begin{cases} y = ax^2 + bx + c \ (a \neq 0) & \cdots\cdots ① \\ y = mx + n & \cdots\cdots ② \end{cases}$$



① と ② が異なる 2 つの交点をもち，

その x 座標を α, β $(\alpha < \beta)$ とする．

このとき，① と ② で囲まれた図形の面積を S とすると

$$S = \frac{|a|}{6}(\beta - \alpha)^3$$

つまり $(\text{面積}) = \dfrac{(x^2\text{の係数の絶対値})}{6} \times (\text{交点の } x \text{ 座標の差})^3$

㊢ $S = \displaystyle\int_\alpha^\beta \left|(mx+n) - (ax^2+bx+c)\right| dx$

$$= \left| \int_\alpha^\beta \{(mx+n) - (ax^2+bx+c)\}\,dx \right|$$

$$= \left| -a\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)\,dx \right|$$

$$= \left| \frac{a}{6}(\beta-\alpha)^3 \right|$$

$$= \frac{|a|}{6}(\beta-\alpha)^3$$

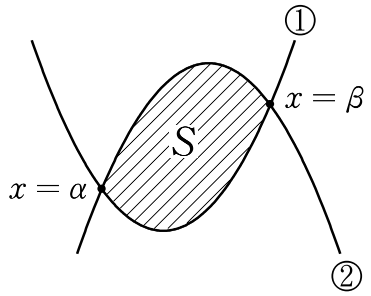
2つの放物線で囲まれる図形の面積

座標平面において，2つの放物線

$$\begin{cases} y = ax^2 + bx + c\ (a \neq 0) & \cdots\cdots① \\ y = px^2 + qx + r\ (p \neq 0) & \cdots\cdots② \end{cases}$$

①と②が異なる2つの交点をもち，

その x 座標を α, β $(\alpha < \beta)$ とする.



このとき ①と②で囲まれた図形の面積を S とすると

$$S = \frac{|a-p|}{6}(\beta-\alpha)^3$$

つまり（面積）$= \dfrac{(x^2\text{の係数の差})}{6} \times (\text{交点の}\ x\ \text{座標の差})^3$

㊫ $S = \displaystyle\int_\alpha^\beta \left|(px^2+qx+r)-(ax^2+bx+c)\right| dx$

$$= \left|\int_\alpha^\beta \{(px^2+qx+r)-(ax^2+bx+c)\}\,dx\right|$$

$$= \left|-(a-p)\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)\,dx\right|$$

$$= \left|\frac{a-p}{6}(\beta-\alpha)^3\right|$$

$$= \frac{|a-p|}{6}(\beta-\alpha)^3$$

放物線と接線と y 軸に平行な直線で囲まれる図形の面積

座標平面において

放物線 $y=ax^2+bx+c\ (a \neq 0)$ を C

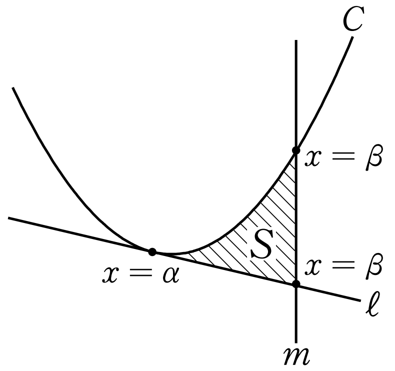
C 上の $x=\alpha$ における接線を ℓ

y 軸に平行な直線 $x=\beta\ (\alpha \neq \beta)$ を m とする.

このとき

C, ℓ, m で囲まれた図形の面積を S とすると

$$S=\frac{|a|}{3}|\beta-\alpha|^3$$



つまり（面積）$=\dfrac{(x^2\text{の係数の絶対値})}{3}\times$(接点と交点の x 座標の差$)^3$

考 $\ell : y=mx+n$ とする.

$$\begin{aligned}
S&=\int_\alpha^\beta \left|(ax^2+bx+c)-(mx+n)\right|dx\\
&=\left|\int_\alpha^\beta \{(ax^2+bx+c)-(mx+n)\}\,dx\right|\\
&=\left|a\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^2\,dx\right|\\
&=\left|a\left[\frac{(x-\alpha)^3}{3}\right]_\alpha^\beta\right|\\
&=\left|\frac{a}{3}(\beta-\alpha)^3\right|\\
&=\frac{|a|}{3}|\beta-\alpha|^3
\end{aligned}$$

放物線と 2 接線で囲まれる図形の面積

座標平面に放物線 $y=ax^2+bx+c\ (a \neq 0)$ ……①

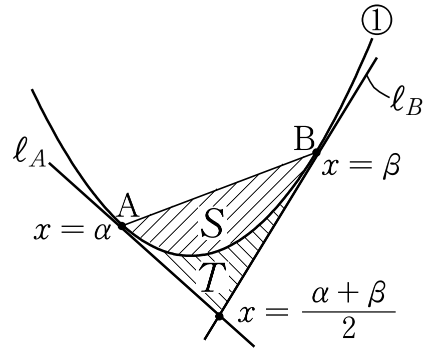
① 上の x 座標が $\alpha,\ \beta\ (\alpha<\beta)$ となる点をそれぞれ A，B とし，

A，B における ① の接線をそれぞれ ℓ_A，ℓ_B とする．

ℓ_A，ℓ_B の交点の x 座標は $\dfrac{\alpha+\beta}{2}$

① と直線 AB で囲まれた図形の面積を S

① と ℓ_A，ℓ_B で囲まれた図形の面積を T



とすると

$$S=\frac{|a|}{6}(\beta-\alpha)^3$$

$$T=\frac{|a|}{12}(\beta-\alpha)^3$$

つまり $T=\dfrac{(x^2\text{の係数の絶対値})}{12}\times(\text{接点の}\ x\ \text{座標の差})^3$

このとき α，β の取り方によらず $S:T=2:1$

考 S は $\boxed{\text{放物線と直線で囲まれる図形の面積}}$

$\ell_A: y=mx+n$，$\ell_B: y=px+q$ とすると

$$\begin{aligned}
T&=\int_{\alpha}^{\frac{\alpha+\beta}{2}}\left|(ax^2+bx+c)-(mx+n)\right|dx+\int_{\frac{\alpha+\beta}{2}}^{\beta}\left|(ax^2+bx+c)-(px+q)\right|dx\\
&=\left|\int_{\alpha}^{\frac{\alpha+\beta}{2}}\{(ax^2+bx+c)-(mx+n)\}\,dx\right|+\left|\int_{\frac{\alpha+\beta}{2}}^{\beta}\{(ax^2+bx+c)-(px+q)\}\,dx\right|\\
&=\left|a\int_{\alpha}^{\frac{\alpha+\beta}{2}}(x-\alpha)^2\,dx\right|+\left|a\int_{\frac{\alpha+\beta}{2}}^{\beta}(x-\beta)^2\,dx\right|\\
&=\left|a\left[\frac{1}{3}(x-\alpha)^3\right]_{\alpha}^{\frac{\alpha+\beta}{2}}\right|+\left|a\left[\frac{1}{3}(x-\beta)^3\right]_{\frac{\alpha+\beta}{2}}^{\beta}\right|\\
&=\left|\frac{a}{3}\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)^3\right|+\left|\frac{a}{3}\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)^3\right|\\
&=\frac{|a|}{24}(\beta-\alpha)^3+\frac{|a|}{24}(\beta-\alpha)^3\\
&=\frac{|a|}{12}(\beta-\alpha)^3
\end{aligned}$$

同じ形の放物線と共通接線で囲まれる図形の面積

座標平面に同じ形の放物線

$$\begin{cases} y = ax^2 + bx + c \ (a \neq 0) & \cdots\cdots① \\ y = ax^2 + Bx + C & \cdots\cdots② \end{cases}$$

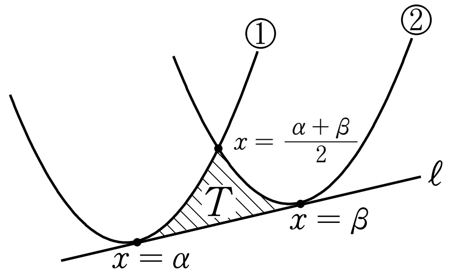
①，② の共通接線を ℓ とし，

①，② と ℓ の接点の x 座標をそれぞれ α, β $(\alpha < \beta)$ とする．

このとき ①，② の交点の x 座標は $\dfrac{\alpha + \beta}{2}$

①，② と ℓ で囲まれた図形の面積を T とすると

$$T = \frac{|a|}{12}(\beta - \alpha)^3$$



つまり（面積）$= \dfrac{（x^2\text{の係数の絶対値）}}{12} \times$（接点の x 座標の差)^3

㊔ $\ell : y = mx + n$ とすると

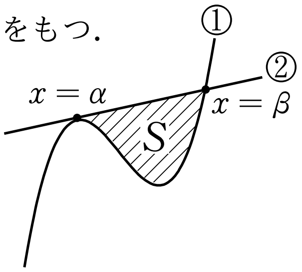
$$\begin{aligned}
T &= \int_{\alpha}^{\frac{\alpha+\beta}{2}} \left|(ax^2 + bx + c) - (mx + n)\right| dx + \int_{\frac{\alpha+\beta}{2}}^{\beta} \left|(ax^2 + bx + c) - (mx + n)\right| dx \\
&= \left| \int_{\alpha}^{\frac{\alpha+\beta}{2}} \{(ax^2 + bx + c) - (mx + n)\} dx \right| + \left| \int_{\frac{\alpha+\beta}{2}}^{\beta} \{(ax^2 + bx + c) - (mx + n)\} dx \right| \\
&= \left| a \int_{\alpha}^{\frac{\alpha+\beta}{2}} (x - \alpha)^2 dx \right| + \left| a \int_{\frac{\alpha+\beta}{2}}^{\beta} (x - \beta)^2 dx \right| \\
&= \left| a \left[\frac{1}{3}(x - \alpha)^3 \right]_{\alpha}^{\frac{\alpha+\beta}{2}} \right| + \left| a \left[\frac{1}{3}(x - \beta)^3 \right]_{\frac{\alpha+\beta}{2}}^{\beta} \right| \\
&= \left| \frac{a}{3} \left(\frac{\beta - \alpha}{2} \right)^3 \right| + \left| \frac{a}{3} \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right)^3 \right| \\
&= \frac{|a|}{24}(\beta - \alpha)^3 + \frac{|a|}{24}(\beta - \alpha)^3 \\
&= \frac{|a|}{12}(\beta - \alpha)^3
\end{aligned}$$

3次関数のグラフと接線で囲まれた図形の面積

座標平面に3次関数のグラフと直線

$$\begin{cases} y = ax^3 + bx^2 + cx + d \ (a \neq 0) & \cdots\cdots① \\ y = mx + n & \cdots\cdots② \end{cases}$$

①と②は x 座標が α の点で接し，x 座標が β の点で交点をもつ.



このとき ①と②で囲まれた図形の面積を S とすると

$$S = \frac{|a|}{12}(\beta - \alpha)^4$$

つまり $(\text{面積}) = \dfrac{(x^3\text{の係数の絶対値})}{12} \times (\text{接点と交点の}\ x\ \text{座標の差})^4$

㊔ $S = \displaystyle\int_\alpha^\beta \left|(mx+n)-(ax^3+bx^2+cx+d)\right| dx$

$$= \left|\int_\alpha^\beta \{(mx+n)-(ax^3+bx^2+cx+d)\}\,dx\right|$$

$$= \left|-a\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^2(x-\beta)\,dx\right|$$

$$= \left|\frac{a}{12}(\beta-\alpha)^4\right|$$

$$= \frac{|a|}{12}(\beta-\alpha)^4$$

4次関数のグラフと複接線で囲まれた図形の面積

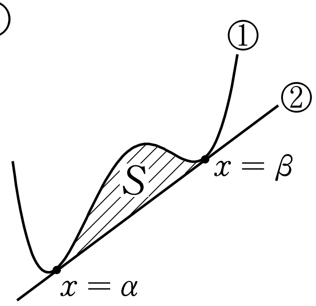
座標平面に4次関数のグラフと直線

$$\begin{cases} y = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e \ (a \neq 0) & \cdots\cdots① \\ y = mx + n & \cdots\cdots② \end{cases}$$

①と②は x 座標が α，β の異なる2点で接する．

このとき ①と②で囲まれた図形の面積を S とすると

$$S = \frac{|a|}{30}(\beta - \alpha)^5$$



つまり $(\text{面積}) = \dfrac{(x^4\text{の係数の絶対値})}{30} \times (\text{接点の } x \text{ 座標の差})^5$

㋕ $S = \displaystyle\int_\alpha^\beta \left|(ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e) - (mx + n)\right| dx$

$= \left|\displaystyle\int_\alpha^\beta \{(ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e) - (mx + n)\}\, dx\right|$

$= \left|a\displaystyle\int_\alpha^\beta (x - \alpha)^2(x - \beta)^2\, dx\right|$

$= \left|\dfrac{a}{30}(\beta - \alpha)^5\right|$

$= \dfrac{|a|}{30}(\beta - \alpha)^5$