数学 II　対数関数

～高校数学のまとめ～

教科書をもとに定義や定理を独自にパネル形式でまとめています．
何度も書き直し，加筆修正を繰り返しており，完成したものではありません．
人によっては不要な部分もあるでしょう．そういうときは読み飛ばしてください．

対数の定義

a を $0<a<1,\ 1<a$ をみたす定数とする.

任意の正の実数 M に対して $a^p = M$ となる実数 p がただ1つ定まる.

この p を a を底(てい)とする M の 対数(たいすう) といい $p = \log_a M$ と表す.

また M をこの対数の 真数(しんすう) という.

㊟補 log は logarithm の略である.

底の条件と真数条件

$\log_a M$ について

$\boxed{1}$ 底の条件は $0<a<1$ または $1<a$

$\boxed{2}$ 真数の条件は $M>0$

指数と対数の関係

$0<a<1$ または $1<a$ とすると

$$a^X = Y \iff X = \log_a Y$$

㊫例 $2^5 = 32 \iff 5 = \log_2 32$

対数の基本的な値

$0 < a < 1$ または $1 < a$ として，次が成り立つ．

$\boxed{1}$ $\log_a a = 1$

$\boxed{2}$ $\log_a 1 = 0$

$\boxed{3}$ $\log_a \dfrac{1}{a} = -1$

㊢ $\boxed{1}$ $a^1 = a \iff \log_a a = 1$

$\boxed{2}$ $a^0 = 1 \iff \log_a 1 = 0$

$\boxed{3}$ $a^{-1} = \dfrac{1}{a} \iff \log_a \dfrac{1}{a} = -1$

n 乗根の対数の基本的な値

$0 < a < 1$ または $1 < a$，n を 2 以上の整数とすると

$$\log_a \sqrt[n]{a} = \frac{1}{n}$$

㊢ $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a} \iff \log_a \sqrt[n]{a} = \dfrac{1}{n}$

対数の基本的な変形

$0 < a < 1$ または $1 < a$，$Y > 0$ とすると

$$a^{\log_a Y} = Y$$

㊢ $a^X = Y$ ……①

とおくと $X = \log_a Y$ ……②

② を ① へ代入して $a^{\log_a Y} = Y$

㊡ $10^{\log_{10} 21} = 21$

対数法則

$0 < a < 1$ または $1 < a$，$M > 0$，$N > 0$，p は実数として，次が成り立つ．

$\boxed{1}$ $\log_a MN = \log_a M + \log_a N$

$\boxed{2}$ $\log_a \dfrac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$

$\boxed{3}$ $\log_a M^p = p \log_a M$

考 $M = a^{\log_a M}$，$N = a^{\log_a N}$

$\boxed{1}$ 指数法則より $MN = a^{\log_a M} a^{\log_a N} = a^{\log_a M + \log_a N}$

対数の定義から $\log_a MN = \log_a M + \log_a N$

$\boxed{2}$ 指数法則より $\dfrac{M}{N} = \dfrac{a^{\log_a M}}{a^{\log_a N}} = a^{\log_a M - \log_a N}$

対数の定義から $\log_a \dfrac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$

$\boxed{3}$ 指数法則より $M^p = (a^{\log_a M})^p = a^{p \log_a M}$

対数の定義から $\log_a M^p = p \log_a M$

底の変換公式

$0 < a < 1$ または $1 < a$，$0 < b < 1$ または $1 < b$，$M > 0$ として

$$\log_a M = \frac{\log_b M}{\log_b a} \quad （底を\ a\ から\ b\ へ変換）$$

考 $a^{\log_a M} = M$

b を底とする対数をとると

$\log_b a^{\log_a M} = \log_b M$

対数法則 $\boxed{3}$ より $\log_a M \log_b a = \log_b M$

$a \fallingdotseq 1$ より $\log_b a \fallingdotseq 0$ であるから

$$\log_a M = \frac{\log_b M}{\log_b a}$$

底と真数の入れかえ

$0<a<1$ または $1<a$，$0<b<1$ または $1<b$ として

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a} \quad (\text{底と真数を入れかえると逆数})$$

㊫ $\boxed{\text{底の変換}}$ より $\log_a b = \dfrac{\log_b b}{\log_b a} = \dfrac{1}{\log_b a}$

㊄ $\log_2 10 = \dfrac{1}{\log_{10} 2}$

実数を対数へ変形

$0<a<1$ または $1<a$，p を実数 として

$$p = \log_a a^p$$

㊄ $3 = \log_2 2^3 = \log_2 8$

対数の底または真数の指数に関する変形

$0<a<1$ または $1<a$，$M>0$，p を実数 として，次が成り立つ．

$\boxed{1}$ $\log_a M^p = p\log_a M$

$\boxed{2}$ $\log_{a^p} M = \dfrac{1}{p}\log_a M$

$\boxed{3}$ $\log_{a^p} M^p = \log_a M$

㊫ $\boxed{1}$ $\boxed{\text{対数法則}}$

$\boxed{2}$ $\boxed{\text{底の変換}}$ より $\log_{a^p} M = \dfrac{\log_a M}{\log_a a^p} = \dfrac{1}{p}\log_a M$

$\boxed{3}$ $\boxed{1}$ と $\boxed{2}$ をともに使う．

㊄ $\boxed{3}$ $\log_9 25 = \log_{3^2} 5^2 = \log_3 5$

㊞ $M>0$ の条件がないときは $\log_a M^p = p\log_a |M|$ のように絶対値記号が出てくる．

対数関数

a が $0 < a < 1,\ 1 < a$ をみたす定数として

$$y = \log_a x$$

と表される関数を a を 底（てい） とする x の 対数関数（たいすうかんすう） という.

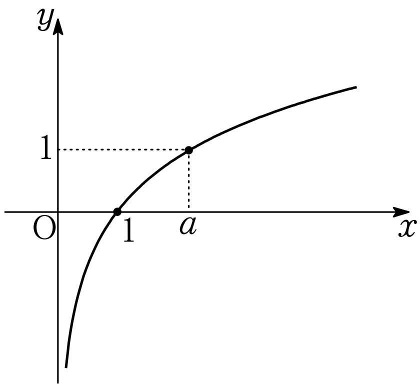
対数関数のグラフ

座標平面で

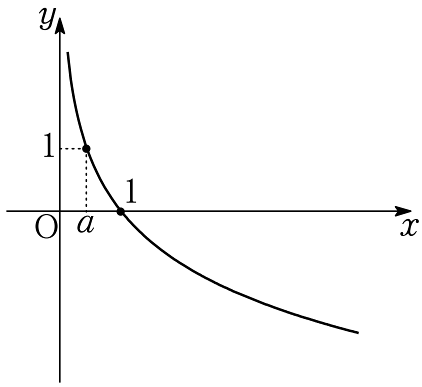
$$y = \log_a x \quad (0 < a < 1,\ 1 < a)$$

のグラフは次のような概形になる.

〔$a > 1$ のとき〕



〔$0 < a < 1$ のとき〕



このグラフについて

$\boxed{1}$ 定点 $(1, 0)$ を通る

$\boxed{2}$ 漸近線は $x = 0$（y 軸）

$\boxed{3}$ 定義域は $x > 0$, 値域は実数全体

$\boxed{4}$ $a > 1$ のとき x の値が増加すると y の値も増加する.

$\boxed{5}$ $0 < a < 1$ のとき x の値が増加すると y の値は減少する.

対数方程式・対数不等式

$0 < a < 1,\ 1 < a$，X，Y を正の実数とするとき，次が成り立つ．

$\boxed{1}$ $\log_a X = \log_a Y \iff X = Y$

$\boxed{2}$ $a > 1$ のとき　$\log_a X < \log_a Y \iff X < Y$（不等号の向きが同じ）

$\boxed{3}$ $0 < a < 1$ のとき　$\log_a X < \log_a Y \iff X > Y$（不等号の向きが反対）

考 $y = \log_a x$ のグラフを考える．

常用対数

底を 10 とする対数 $\log_{10} M$ を 常用対数（じょうようたいすう）という．

整数部分が n 桁の数

正の実数 N を整数部分が n 桁の数とすると，次が成り立つ．

1. $10^{n-1} \leqq N < 10^n$
2. $n-1 \leqq \log_{10} N < n$
3. $[\log_{10} N] + 1 = n$

㋕ 整数部分が n 桁の数で最小のものは $10^{n-1} = 1\underbrace{00\cdots0}_{(n-1)\text{ 個}}$

㊀ $1 \leqq (1$ 桁の整数$) < 10$

$10 \leqq (2$ 桁の整数$) < 10^2$

$10^2 \leqq (3$ 桁の整数$) < 10^3$

整数部分が n 桁で最高位の数字が m の数

正の実数 N を整数部分が n 桁で最高位の数字が m の数とすると，次が成り立つ．

1. $m \cdot 10^{n-1} \leqq N < (m+1) \cdot 10^{n-1}$
2. $\log_{10} m \leqq \log_{10} N - (n-1) < \log_{10}(m+1)$
3. $\log_{10} m \leqq (\log_{10} N$ の小数部分$) < \log_{10}(m+1)$

㊀ 3 桁の整数で最高位の数字が 5 $(n=3,\ m=5)$ となる数は 500 以上 600 未満だから

$$5 \cdot 10^2 \leqq \begin{array}{|c|c|c|} \text{百} & \text{十} & \text{一} \\ \hline 5 & & \\ \hline \end{array} < 6 \cdot 10^2$$

小数第 n 位に初めて 0 でない数字が表れる数

正の実数 N を小数第 n 位に初めて 0 でない数字が表れる数とすると次が成り立つ.

$\boxed{1}$ $10^{-n} \leqq N < 10^{-n+1}$

$\boxed{2}$ $-n \leqq \log_{10} N < -n+1$

$\boxed{3}$ $-[\log_{10} N] = n$

㊟ 小数第 n 位に初めて 0 でない数字が表れる数で最小のものは $= 0.\underbrace{00\cdots1}_{n\text{ 個}} = \dfrac{1}{10^n} = 10^{-n}$

例 $0.1 \leqq$（小数第 1 位に初めて 0 でない数学が現れる数）< 1
$0.01 \leqq$（小数第 2 位に初めて 0 でない数学が現れる数）< 0.1
$0.001 \leqq$（小数第 3 位に初めて 0 でない数学が現れる数）< 0.01

小数第 n 位に初めて 0 でない数字 m が表れる数

正の実数 N を小数第 n 位に初めて 0 でない数字 m が表れる数とすると次が成り立つ.

$\boxed{1}$ $m \cdot 10^{-n} \leqq N < (m+1) \cdot 10^{-n}$

$\boxed{2}$ $\log_{10} m \leqq \log_{10} N + n < \log_{10}(m+1)$

$\boxed{3}$ $\log_{10} m \leqq$（$\log_{10} N$ の小数部分）$< \log_{10}(m+1)$

例 小数第 3 位に初めて 0 でない数字 5（$n=3,\ m=5$）が現れる数は 0.005 以上 0.006 未満だから

$$5 \cdot 10^{-3} \leqq 0.\overset{①}{\boxed{0}}\overset{②}{\boxed{0}}\overset{③}{\boxed{5}}\cdots < 6 \cdot 10^{-3}$$

常用対数表

常用対数の近似値を次のように表にしたものを **常用対数表** という.

数	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1.0	.0000	.0043	.0086	.0128	.0170	.0212	.0253	.0294	.0334	.0374
1.1	.0414	.0453	.0492	.0531	.0569	.0607	.0645	.0682	.0719	.0755
1.2	.0792	.0828	.0864	.0899	.0934	.0969	.1004	.1038	.1072	.1106
1.3	.1139	.1173	.1206	.1239	.1271	.1303	.1335	.1367	.1399	.1430
1.4	.1461	.1492	.1523	.1553	.1584	.1614	.1644	.1673	.1703	.1732
1.5	.1761	.1790	.1818	.1847	.1875	.1903	.1931	.1959	.1987	.2014
1.6	.2041	.2068	.2095	.2122	.2148	.2175	.2201	.2227	.2253	.2279
1.7	.2304	.2330	.2355	.2380	.2405	.2430	.2455	.2480	.2504	.2529
1.8	.2553	.2577	.2601	.2625	.2648	.2672	.2695	.2718	.2742	.2765
1.9	.2788	.2810	.2833	.2856	.2878	.2900	.2923	.2945	.2967	.2989
2.0	.3010	.3032	.3054	.3075	.3096	.3118	.3139	.3160	.3181	.3201
2.1	.3222	.3243	.3263	.3284	.3304	.3324	.3345	.3365	.3385	.3404
2.2	.3424	.3444	.3464	.3483	.3502	.3522	.3541	.3560	.3579	.3598
2.3	.3617	.3636	.3655	.3674	.3692	.3711	.3729	.3747	.3766	.3784
2.4	.3802	.3820	.3838	.3856	.3874	.3892	.3909	.3927	.3945	.3962
2.5	.3979	.3997	.4014	.4031	.4048	.4065	.4082	.4099	.4116	.4133
2.6	.4150	.4166	.4183	.4200	.4216	.4232	.4249	.4265	.4281	.4298
2.7	.4314	.4330	.4346	.4362	.4378	.4393	.4409	.4425	.4440	.4456
2.8	.4472	.4487	.4502	.4518	.4533	.4548	.4564	.4579	.4594	.4609
2.9	.4624	.4639	.4654	.4669	.4683	.4698	.4713	.4728	.4742	.4757
3.0	.4771	.4786	.4800	.4814	.4829	.4843	.4857	.4871	.4886	.4900
3.1	.4914	.4928	.4942	.4955	.4969	.4983	.4997	.5011	.5024	.5038
3.2	.5051	.5065	.5079	.5092	.5105	.5119	.5132	.5145	.5159	.5172
3.3	.5185	.5198	.5211	.5224	.5237	.5250	.5263	.5276	.5289	.5302
3.4	.5315	.5328	.5340	.5353	.5366	.5378	.5391	.5403	.5416	.5428
3.5	.5441	.5453	.5465	.5478	.5490	.5502	.5514	.5527	.5539	.5551
3.6	.5563	.5575	.5587	.5599	.5611	.5623	.5635	.5647	.5658	.5670
3.7	.5682	.5694	.5705	.5717	.5729	.5740	.5752	.5763	.5775	.5786
3.8	.5798	.5809	.5821	.5832	.5843	.5855	.5866	.5877	.5888	.5899
3.9	.5911	.5922	.5933	.5944	.5955	.5966	.5977	.5988	.5999	.6010
4.0	.6021	.6031	.6042	.6053	.6064	.6075	.6085	.6096	.6107	.6117
4.1	.6128	.6138	.6149	.6160	.6170	.6180	.6191	.6201	.6212	.6222
4.2	.6232	.6243	.6253	.6263	.6274	.6284	.6294	.6304	.6314	.6325
4.3	.6335	.6345	.6355	.6365	.6375	.6385	.6395	.6405	.6415	.6425
4.4	.6435	.6444	.6454	.6464	.6474	.6484	.6493	.6503	.6513	.6522
4.5	.6532	.6542	.6551	.6561	.6571	.6580	.6590	.6599	.6609	.6618
4.6	.6628	.6637	.6646	.6656	.6665	.6675	.6684	.6693	.6702	.6712
4.7	.6721	.6730	.6739	.6749	.6758	.6767	.6776	.6785	.6794	.6803
4.8	.6812	.6821	.6830	.6839	.6848	.6857	.6866	.6875	.6884	.6893
4.9	.6902	.6911	.6920	.6928	.6937	.6946	.6955	.6964	.6972	.6981
5.0	.6990	.6998	.7007	.7016	.7024	.7033	.7042	.7050	.7059	.7067
5.1	.7076	.7084	.7093	.7101	.7110	.7118	.7126	.7135	.7143	.7152
5.2	.7160	.7168	.7177	.7185	.7193	.7202	.7210	.7218	.7226	.7235
5.3	.7243	.7251	.7259	.7267	.7275	.7284	.7292	.7300	.7308	.7316
5.4	.7324	.7332	.7340	.7348	.7356	.7364	.7372	.7380	.7388	.7396

上表は小数第 5 位を四捨五入して小数第 4 位までの値を表わしている.

例えば，2 行目の 10 個の近似値は左から順に

$\log_{10} 1.1 = 0.0414$, $\log_{10} 1.11 = 0.0453$, $\log_{10} 1.12 = 0.0492$, $\cdots$, $\log_{10} 1.19 = 0.0755$

例　表より $\log_{10} 3 = 0.4771$，$\log_{10} 3.64 = 0.5611$