数学Ⅰ　数と式「式と計算」

~高校数学のまとめ~

教科書をもとに定義や定理を独自にパネル形式でまとめています．
何度も書き直し，加筆修正を繰り返しており，完成したものではありません．
人によっては不要な部分もあるでしょう．そういうときは読み飛ばしてください．

累乗と指数

0 でない文字 a をいくつかかけたものを a の 累乗（るいじょう） という.

a を n 回かけた累乗を a の n 乗といい a^n とかく.

すなわち

$$\underbrace{a\times a\times\cdots\times a}_{n\text{個}}=a^n \quad \text{または} \quad \underbrace{a\cdot a\cdot\cdots\cdot a}_{n\text{個}}=a^n$$

a^n と表したとき a を 底（てい）, n を 指数（しすう） という.

指数が 1 のときは $a^1=a$ と 1 は省略できる.

指数が 0 のときは $a^0=1$ と定義する.

㊞ $a\times a\times a=a^3$ または $a\cdot a\cdot a=a^3$

指数法則

a, b を 0 でない実数, m, n は正の整数とするとき, 次が成り立つ.

1. $a^m a^n=a^{m+n}$
2. $(a^m)^n=a^{mn}=(a^n)^m$
3. $(ab)^n=a^n b^n$
4. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n=\dfrac{a^n}{b^n}$

例
1. $a^2a^3=a^{2+3}=a^5$
2. $(a^3)^2=a^{3\times 2}=(a^2)^3=a^6$
3. $(ab)^2=a^2b^2$
4. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^2=\dfrac{a^2}{b^2}$

単項式

数や文字をかけただけでつくられる式を **単項式**（たんこうしき）という．

㊉ $2,\quad x^2,\quad 2x^2,\quad 5x^2y,\quad 5x^2yz,\cdots$ を単項式という．

㊉補 文字は変数ともいい，ざっくり言うといろいろ変身する数のこと．

単項式の次数と係数

1 単項式において かけ合わせた文字の個数を その単項式の **次数**（じすう）という．

ただし，0 以外の数だけの単項式の次数は 0 とし，数 0 の次数は定義しない．

2 単項式において 数の部分をその単項式の **係数**（けいすう）という．

とくに 係数が 1 のときは基本的に表記しない．

3 文字が 2 種類以上あるときは 特定の文字に着目し，

着目しない文字は数とみなすことがある．

㊉ 単項式 $3x^2$ の次数は **2**，係数は **3**

㊉ 単項式 2 の次数は **0**，係数は **2**

㊉ 単項式 $5x^2y$ の次数は **3**，係数は **5**

㊉ 単項式 $5x^2y$ は文字 x に着目すると次数は **2**，係数は $\boldsymbol{5y}$

㊉ 単項式 $5x^2y$ は文字 y に着目すると次数は **1**，係数は $\boldsymbol{5x^2}$

多項式と整式

単項式の和として表される式を **多項式**（たこうしき）という．

単項式と多項式を合わせて **整式**（せいしき）という．

単項式を多項式の 1 つとして，多項式と整式を同じ意味で用いることが多い．

整式の項

整式について

$\boxed{1}$ 和で分けられた単項式を整式の **項**（こう） という.

$\boxed{2}$ 文字を含まない項を整式の **定数項**（ていすうこう） という.

$\boxed{3}$ 文字の部分が同じである項を **同類項**（どうるいこう） という.

例 整式 x^2+3x+2 の項は $\boldsymbol{x^2}$ と $\boldsymbol{3x}$ と $\mathbf{2}$ で，定数項は $\mathbf{2}$.

例 整式 $x^2+2x+3+4x^2$ の同類項は $\boldsymbol{x^2}$ と $\boldsymbol{4x^2}$

整式の次数

同類項をまとめて整理した整式において

最も次数の高い項の次数をこの整式の **次数** という.

とくに 次数が n の整式を **n 次式** という.

例 整式 $5x^2+x+3$ の次数は $\mathbf{2}$ で **2 次式**

例 整式 $x^3+x^2+2x+3+4x^2-x^3$ について

同類項をまとめて整理すると

$$x^3+x^2+2x+3+4x^2-x^3=5x^2+2x+3$$

最も次数の高い項が $5x^2$ なので，次数は $\mathbf{2}$ で **2 次式**

例 整式 $5x^2y+3xy^3+2xy^2$ について

最も次数の高い項が $3xy^3$ なので，次数は $\mathbf{4}$ で **4 次式**

文字 x に着目すると，最も次数の高い項が $5x^2y$ なので，次数は $\mathbf{2}$ で **$\boldsymbol{x}$ の 2 次式**

文字 y に着目すると，最も次数の高い項が $3xy^3$ なので，次数は $\mathbf{3}$ で **$\boldsymbol{y}$ の 3 次式**

降べきの順，昇べきの順

整式をある文字に着目して

1. 項の次数が低くなる順に整理することを降(こう)べきの順に整理するという．

2. 項の次数が高くなる順に整理することを昇(しょう)べきの順に整理するという．

例 整式 $2x+x^3+3x^2+1$ を文字 x に着目して

1. 降べきの順に整理すると $\boldsymbol{x^3+3x^2+2x+1}$
2. 昇べきの順に整理すると $\boldsymbol{1+2x+3x^2+x^3}$

四則演算（四則計算）

演算(えんざん) とは 計算処理 のことである．

2 つの文字 a，b に演算 $\circ$ を定義して $a \circ b$ と表す．

1. $\circ$ を $+$ として $a+b$ と表し，この演算を 加法(かほう) または 和(わ) という．

2. $\circ$ を $-$ として $a-b$ と表し，この演算を 減法(げんぽう) または 差(さ) という．

3. $\circ$ を $\times$ として $a\times b$ と表し，この演算を 乗法(じょうほう) または 積(せき) という．

4. $\circ$ を $\div$ として $a\div b$ と表し，この演算を 除法(じょほう) または 商(しょう) という．

これら 4 つの演算をまとめて 四則演算(しそくえんざん) または 四則計算(しそくけいさん) という．

3 について $\times$ を・で表したり省略することもある．

つまり $a\times b=a\cdot b=ab$

4 について $\div$ を分数で表わすこともできる．また，0 で割ることは考えない．

つまり $a\div b=\dfrac{a}{b}$ $(b\neq 0)$

補 和（足し算），差（引き算），積（掛け算），商（割り算）を四則演算という．

交換法則

2 つの文字 a，b に演算 $\circ$ が定義されているとき

$$a \circ b = b \circ a$$

が成立するならば，演算 $\circ$ は **交換法則**（こうかんほうそく）を満たすという．

㊉ $a+b=b+a$ が成立するので，和は交換法則を満たす．
㊉ $a \times b = b \times a$ が成立するので，積は交換法則を満たす．

結合法則

3 つの文字 a，b，c に演算 $\circ$ が定義されているとき

$$(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$$

が成立するならば，演算 $\circ$ は **結合法則**（けつごうほうそく）を満たすという．

㊉ $(a+b)+c=a+(b+c)$ が成立するので，和は結合法則を満たす．
㊉ $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$ が成立するので，積は結合法則を満たす．

分配法則

3 つの文字 a，b，c に 2 つの演算 $\circ$，$\diamond$ が定義されているとき

$\boxed{1}$ $a \circ (b \diamond c) = (a \circ b) \diamond (a \circ c)$

$\boxed{2}$ $(a \diamond b) \circ c = (a \circ c) \diamond (b \circ c)$

$\boxed{1}$，$\boxed{2}$ がともに成立するならば

演算 $\circ$ は演算 $\diamond$ に対して **分配法則**（ぶんぱいほうそく）を満たすという．

㊉ $\boxed{1}$ $a \times (b+c) = a \times b + a \times c$
$\boxed{2}$ $(a+b) \times c = a \times c + b \times c$
$\boxed{1}$，$\boxed{2}$ がともに成立するので，積は和に対して分配法則を満たす．

展開

いくつかの整式の積の形をした式において

積を計算して 1 つの整式に表すことを その式を **展開**(てんかい)する という.

分配法則

1 $a(x+y)=ax+ay$

2 $(x+y)a=ax+ay$

例 1 $3(x+y)=3x+3y$

2 $(x+y)z=xz+yz$

整式の乗法

$$(a+b)(x+y)=ax+ay+bx+by$$

例 $(a+3)(x+2)=ax+2a+3x+6$

平方式の展開

1 $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

2 $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$

例 1 $(x+3)^2=x^2+2\cdot x\cdot 3+3^2=x^2+6x+9$

2 $(x-3)^2=x^2-2\cdot x\cdot 3+3^2=x^2-6x+9$

和と差の積の展開

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$$

例 $(x+3)(x-3)=x^2-3^2=x^2-9$

1次式の積の展開

$\boxed{1}$ $(x+\alpha)(x+\beta)=x^2+(\alpha+\beta)x+\alpha\beta$

$\boxed{2}$ $(ax+b)(cx+d)=acx^2+(ad+bc)x+bd\quad(ac \fallingdotseq 0)$

例 $\boxed{1}$ $(x+2)(x+3)=x^2+(2+3)x+2\cdot3=x^2+5x+6$

$\boxed{2}$ $(2x+3)(4x+5)=2\cdot4x^2+(2\cdot5+3\cdot4)x+3\cdot5=8x^2+22x+15$

立方式の展開

$\boxed{1}$ $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

$\boxed{2}$ $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

例 $\boxed{1}$ $(x+2)^3=x^2+3\cdot x^2\cdot2+3\cdot x\cdot2^2+2^3=x^3+6x^2+12x+8$

$\boxed{2}$ $(x-2)^3=x^2-3\cdot x^2\cdot2+3\cdot x\cdot2^2-2^3=x^3-6x^2+12x-8$

3項の和の平方式の展開

$$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$$

例 $(x+y+1)^2=x^2+y^2+1^2+2xy+2\cdot y\cdot1+2\cdot1\cdot x=x^2+y^2+2xy+2x+2y+1$

平方の和と差

$\boxed{1}$ $(a+b)^2+(a-b)^2=2(a^2+b^2)$

$\boxed{2}$ $(a+b)^2-(a-b)^2=4ab$

考 左辺を展開すると右辺になる．

$\boxed{1}$ $(a+b)^2+(a-b)^2=(a^2+2ab+b^2)+(a^2-2ab+b^2)=2(a^2+b^2)$

$\boxed{2}$ $(a+b)^2-(a-b)^2=(a^2+2ab+b^2)-(a^2-2ab+b^2)=4ab$

例 $\boxed{1}$ $(x+1)^2+(x-1)^2=2(x^2+1)$

$\boxed{2}$ $(x+1)^2-(x-1)^2=4x$

因数分解

1つの整式を1次以上の整式の積の形に表すことを

もとの式を **因数分解**（いんすうぶんかい） するという.

このとき，積を作っている各式をもとの式の因数という.

㊫ 大雑把に説明すると「展開」の計算の逆が「因数分解」の計算である.

平方式への因数分解

1 $a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$

2 $a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$

㊀例 1 $x^2+6x+9=x^2+2\cdot x\cdot 3+3^2=(x+3)^2$

2 $x^2-6x+9=x^2-2\cdot x\cdot 3+3^2=(x-3)^2$

3項の和の平方式への因数分解

$$a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca=(a+b+c)^2$$

例 $x^2+y^2+2xy+2x+2y+1=x^2+y^2+1^2+2xy+2\cdot y\cdot 1+2\cdot 1\cdot x=(x+y+1)^2$

別 $x^2+y^2+2xy+\underline{2x+2y}+1=(x+y)^2+\underline{2(x+y)}+1=(x+y+1)^2$

立方式への因数分解

1 $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3=(a+b)^3$

2 $a^3-3a^2b+3ab^2-b^3=(a-b)^3$

例 1 $x^3+6x^2+12x+8=x^2+3\cdot x^2\cdot 2+3\cdot x\cdot 2^2+2^3=(x+2)^3$

2 $x^3-6x^2+12x-8=x^2-3\cdot x^2\cdot 2+3\cdot x\cdot 2^2-2^3=(x-2)^3$

平方の差の因数分解

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

㊐ $x^2 - 9 = x^2 - 3^2 = (x - 3)(x + 3)$

2次式の因数分解

$$x^2 + (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = (x + \alpha)(x + \beta)$$

㊐ $x^2 + 5x + 6 = x^2 + (2 + 3)x + 2 \cdot 3 = (x + 2)(x + 3)$

2次式の因数分解（たすきがけ）

$$acx^2 + (ad + bc)x + bd = (ax + b)(cx + d) \quad (ac \neq 0)$$

$$\left[\begin{array}{cccr} a & & b & \longrightarrow \quad bc \\ c & & d & \longrightarrow \quad ad \\ \hline & & & ad + bc \end{array}\right]$$

㊐ $10x^2 + 7x - 12 = \boldsymbol{(2x + 3)(5x - 4)}$

$$\left[\begin{array}{cccr} 2 & & 3 & \longrightarrow \quad 15 \\ 5 & & -4 & \longrightarrow \quad -8 \\ \hline & & & 7 \end{array}\right]$$

立方の和または差の因数分解

[1] $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

[2] $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$

㊠ [1] $x^3 - 8 = x^3 - 2^3 = (x-2)(x^2 + 2x + 4)$
[2] $x^3 + 8 = x^3 + 2^3 = (x+2)(x^2 - 2x + 4)$

n 乗の差の因数分解

n を 2 以上の自然数とする.

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

㊠ $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$
㊠ $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$
㊠ $a^4 - b^4 = (a-b)(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3)$
㊠ $a^5 - b^5 = (a-b)(a^4 + a^3b^2 + a^2b^2 + ab^3 + b^4)$

n 乗の和の因数分解

n を 3 以上の奇数とする.

$$a^n + b^n = (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \cdots - ab^{n-2} + b^{n-1})$$

㊠ $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$
㊠ $a^5 + b^5 = (a+b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4)$
㊠ $a^7 + b^7 = (a+b)(a^6 - a^5b + a^4b^2 - a^3b^3 + a^2b^4 - ab^5 + b^6)$

3次の因数分解公式

$$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$$

考 $\underline{a^3+b^3}+c^3-3abc=\underline{(a+b)^3-3ab(a+b)}+c^3-3abc$
$=(a+b)^3+c^3-3ab(a+b)-3abc$
$=\{(a+b)+c\}\{(a+b)^2-(a+b)c+c^2\}-3ab\{(a+b)+c\}$
$=\{(a+b)+c\}\{(a+b)^2-(a+b)c+c^2-3ab\}$
$=(a+b+c)(a^2+2ab+b^2-ca+bc-3ab)$
$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

例 $x^3+y^3+1-3xy=x^3+y^3+1^3-3\cdot x\cdot y\cdot 1$
$=(x+y+1)(x^2+y^2+1-2xy-2x-2y)$

複２次式

４次の整式の中で奇数の次数の項を含まないものを **複（ふく）２次式** という．

すなわち ax^4+bx^2+c（a，b，c は定数，$a \fallingdotseq 0$）の形で表される整式を

複２次式 という．

㊎ x^4+x^2+1，x^4+4，$\cdots$ を複２次式という．

複２次式の因数分解

複２次式 ax^4+bx^2+c の因数分解は次のようにできる．

$\boxed{1}$ $x^2=t$ とおき t の２次式 at^2+bt+c とみる

$\boxed{2}$ 平方の差 $(x^2+p)^2-(q\,x)^2$ に変形する

㊎ $\boxed{1}$ x^4-5t^2+4 を因数分解する．

$x^2=t$ とおき

$$
\begin{aligned}
x^4-5t^2+4 &= t^2-5t+4\\
&=(t-1)(t-4)\\
&=(x^2-1)(x^2-4)\\
&=(x-1)(x+1)(x-2)(x+2)
\end{aligned}
$$

$\boxed{2}$ x^4+x^2+1 を因数分解する．

$x^2=t$ とおくと $x^4+x^2+1=t^2+t+1$ とすぐに因数分解できない．

そこで，平方の差の形を作ることを考えて

$$
\begin{aligned}
x^4+x^2+1 &= x^4+2x^2+1-x^2\\
&=(x^2+1)^2-x^2\\
&=\{(x^2+1)-x\}\{(x^2+1)+x\}\\
&=(x^2-x+1)(x^2+x+1)
\end{aligned}
$$

㊎ $x^4+4=(x^2+2)^2-4x^2=\{(x^2+2)-2x\}\{(x^2+2)+2x\}=(x^2-2x+2)(x^2+2x+2)$

2 文字の対称式

2 つの文字の整式で，その 2 つの文字を入れかえても値が変わらない式を

その 2 文字の **対称式**（たいしょうしき）という．

とくに その 2 文字の 和 と 積 を **基本対称式**（きほんたいしょうしき）という．

すなわち $f(x, y)$ を x と y に関する式として

$$f(x, y) = f(y, x)$$

が成り立つとき $f(x, y)$ を x と y の **対称式** という．

とくに $x + y$ と xy を **基本対称式** という．

例 $f(x, y) = x^2 + y^2$

について

$$x^2 + y^2 = y^2 + x^2 \quad \text{すなわち} \quad f(x, y) = f(y, x)$$

が成り立つ．

つまり $x^2 + y^2$ は x と y の対称式である．

2 文字の対称式の性質

2 文字の対称式は **基本対称式**だけで表すことができる．

すなわち x と y の 対称式 は $x + y$ または xy だけで表すことができる．

例 $x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy$

例 $x^3 + y^3 = (x + y)^3 - 3xy(x + y)$

3 文字の対称式

3 つの文字の整式で

その 3 つの文字のどの 2 つの文字を入れかえても値が変わらない式を

その 3 文字の **対称式** という.

とくに その 3 文字の和 と 2 文字の積の和 と 積 を **基本対称式** という.

すなわち $f(x,\ y,\ z)$ を x と y と z に関する式として

$$\begin{aligned} f(x,\ y,\ z) &= f(x,\ z,\ y) = f(y,\ x,\ z) \\ &= f(y,\ z,\ x) = f(z,\ x,\ y) = f(z,\ y,\ x) \end{aligned}$$

が成り立つとき $f(x,\ y,\ z)$ を x と y と z の**対称式** という.

とくに $x+y+z$ と $xy+yz+zx$ と xyz を **基本対称式** という.

例 $f(x,\ y,\ z) = x^2+y^2+z^2$

について

$$x^2+y^2+z^2 = x^2+z^2+y^2 = y^2+x^2+z^2 = y^2+z^2+x^2 = z^2+x^2+y^2 = z^2+y^2+x^2$$

すなわち

$$f(x,\ y,\ z) = f(x,\ z,\ x) = f(y,\ x,\ z) = f(y,\ z,\ x) = f(z,\ x,\ y) = f(z,\ y,\ x)$$

が成り立つ.

つまり $x^2+y^2+z^2$ は x と y と z の対称式である.

3 文字の対称式の性質

3 文字の対称式 は **基本対称式だけ**で表すことができる.

すなわち x と y と z の 対称式 は

$x+y+z$ または $xy+yz+zx$ または xyz だけで表すことができる.

例 $x^2+y^2+z^2 = (x+y+z)^2-2(xy+yz+zx)$

例 $x^3+y^3+z^3 = (x+y+z)^3-3(x+y+z)(xy+yz+zx)+3xyz$

2 文字の交代式

2 つの文字の整式で

その 2 つの文字を入れ替えて (-1) 倍して値が変わらない式を

その 2 文字の 交代式（こうたいしき）という.

すなわち $f(x,\ y)$ を x と y に関する式として

$$f(x,\ y)=-f(y,\ x)$$

が成り立つとき $f(x,\ y)$ を x と y の 交代式 という.

例 $f(x,\ y)=x-y$

について

$$x-y=-(y-x) \quad \text{すなわち} \quad f(x,\ y)=-f(y,\ x)$$

が成り立つ.

つまり $x-y$ は x と y の交代式である.

2 文字の交代式の性質

2 文字の交代式 は（2 つの文字の差）×（対称式）と表すことができる.

すなわち x と y の交代式は $(x-y)$ ×（対称式）のように表すことができる.

例 $x^3-y^3=(x-y)(x^2+xy+y^2)$

3 文字の交代式

3 つの文字の整式で

その任意の 2 つの文字を入れ替えて (-1) 倍して値が変わらない式を

その 3 文字の **交代式** という.

すなわち $f(x,\,y,\,z)$ を x と y と z に関する式として

$$f(x,\,y,\,z)=-f(y,\,x,\,z)=-f(z,\,y,\,x)=-f(x,\,z,\,y)$$

が成り立つとき $f(x,\,y,\,z)$ を x と y と z の **交代式** という.

例 $f(x,\,y,\,z)=(x-y)(y-z)(z-x)$

について

$(x-y)(y-z)(z-x)$

$=-(y-x)(x-z)(z-y)=-(z-y)(y-x)(x-z)=-(x-z)(z-y)(y-x)$

すなわち

$$f(x,\,y,\,z)=-f(y,\,x,\,z)=-f(z,\,y,\,x)=-f(x,\,z,\,y)$$

が成り立つ.

つまり $f(x,\,y,\,z)$ は x と y と z の交代式である.

3 文字の交代式の性質

3 文字の交代式 は (2 つの文字の差の積)×(対称式) と表すことができる.

すなわち x と y と z の交代式 は $(x-y)(y-z)(z-x)\times$(対称式)

のように表すことができる.

例 $z(x-y)^3+x(y-z)^3+y(z-x)^3=(x-y)(y-z)(z-x)(x+y+z)$

対称式と交代式の関係

同じ文字に対する対称式，交代式について

$\boxed{1}$ （対称式）＋（対称式）＝（対称式）

$\boxed{2}$ （交代式）＋（交代式）＝（交代式）

$\boxed{3}$ （対称式）×（対称式）＝（対称式）

$\boxed{4}$ （交代式）×（交代式）＝（対称式）

$\boxed{5}$ （対称式）×（交代式）＝（交代式）

㊗ $\boxed{4}$ の関係から，交代式を 2 乗すると対称式になることもわかる．
例えば $(x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$